LES PROBABILITES

A. Introduction

C'est grâce aux jeux de hasard comme les cartes ou les dés auxquels se sont intéressés le philosophe et écrivain Pascal (1623-1662) et le mathématicien Fermat (1601-1665) qu'est né le calcul des probabilités. La théorie des probabilités est une théorie qui veut mathématiser des situations dont l'issue est incertaine, dont la réalisation est due au hasard.

B. Définitions

1. Expérience aléatoire

Une *expérience aléatoire* est une expérience dont le résultat ne peut pas être prévu et dont on connaît au préalable l'ensemble des résultats possibles.

L'ensemble *E* (ou Ω) de tous les résultats possibles est *l'espace des éventualités* (ou catégorie d'épreuve ou ensemble fondamental ou univers des possibles).

Remarque
On se limitera aux cas où l'ensemble des résultats possibles est fini.

2. Événement

Un *événement* *A* d'une expérience aléatoire est un sous-ensemble de l'ensemble *E* des résultats possibles. Donc $A \subset E$.
L'événement *A* est dit réalisé lors d'une expérience aléatoire si le résultat de l'expérience lui appartient.

Exemples

1. L'expérience consiste à jeter un dé et à noter le résultat obtenu.
Il y a 6 résultats possibles : l'apparition des points 1, 2, 3, 4, 5 et 6 donc l'ensemble des résultats possibles est : $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
Un événement *A* est, par exemple : '' obtenir un nombre pair ''; $A = \{2, 4, 6\}$

2. L'expérience consiste à lancer 3 fois de suite une pièce de monnaie et à observer la face supérieure des jets consécutifs.

$$E = \{ (F,F,F), (F,F,P), (F,P,F), (P,F,F), (P,P,F), (P,F,P), (F,P,P), (P,P,P) \}$$

Un événement *A* est par exemple : ''obtenir au moins deux fois face '';

$$E = \{ (F,F,F), (F, F, P), (F,P,F), (P, F,F)\}$$

En particulier :

- l'ensemble vide $(\varnothing)$ est **l'événement impossible** (il ne se réalise jamais),
- l'ensemble *E* (ou Ω) est **l'événement certain** *(ou sûr*, il se réalise toujours),
- tout singleton est appelé **événement élémentaire,**
- $A \cup B$ est l'événement qui se produit si l'un des événements *A* ou *B* se produit (*A* se réalise ou *B* se réalise ou les deux se réalisent),
- $A \cap B$ est l'événement qui se produit si *A* et *B* sont tous les deux réalisés,
- Si $A \cap B = \varnothing$, *A* et *B* sont **disjoints** ou **incompatibles** (*A* et *B* ne peuvent se réaliser en même temps),
- $\overline{A}$ est le **complémentaire** de *A* : c'est l'événement qui se produit si *A* n'est pas réalisé.
  A et $\overline{A}$ sont des événements contraires.
  Donc $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$.

C. Probabilité

1. Introduction

On lance plusieurs fois un dé non pipé et on observe le résultat obtenu. On s'intéresse à la question suivante : "est-ce un 3 ou non ?"

On obtient les résultats suivants :

1re expérience

Nombres de lancers	Nombres de 3 obtenus	Fréquence	Nombre de ''non 3''	Fréquence
10	3	0,3	7	0,7
20	4	0,2	16	0,8
30	5	0,166…	25	0,833…
50	8	0,16	42	0,84
100	15	0,15	85	0,85
500	83	0,166	417	0,834
800	130	0,1625	670	0,8375
2000	333	0,1665	1667	0,8335

2e expérience

Nombres de lancers	Nombres de 3 obtenus	Fréquence	Nombre de ''non 3''	Fréquence
10	2	0,2	8	0,8
20	3	0,15	17	0,85
30	5	0,166…	25	0,833…
50	9	0,18	41	0,82
100	17	0,17	83	0,83
500	84	0,168	416	0,832
800	128	0,16	672	0,84
2000	331	0,1655	1669	0,8345

A priori, en lançant un dé non pipé on a une chance sur 6 d'obtenir un ''3''.

Comme le dé n'est pas truqué, il n'est pas surprenant d'obtenir des fréquences relatives d'apparition du "3'' voisines de 0,1666... et de 0,8333… pour l'obtention d'un autre résultat que "3".

On constate que plus le nombre de lancers est grand, plus la fréquence est voisine de la fréquence idéale qui est 0,1666…= $\frac{1}{6}$ pour obtenir un "3".

La **probabilité de l'événement** *A* : "obtenir un 3" est :

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} f_n = \lim_{n \to \infty} \frac{p_i}{n} = 0{,}1666... = \frac{1}{6}$$

où f_n représente la fréquence avec laquelle l'événement *A* s'est produit lors de *n* lancers et p_i le nombre de cas favorables lors de la i$^{\text{ième}}$ expérience lors de *n* lancers.

On observe également que :

- Toutes les fréquences calculées sont comprises entre 0 et 1.
- La somme des fréquences pour un même nombre de lancers est 1.

2. Définition

Une probabilité *P* est une application de l'ensemble des événements dans l'ensemble des réels telle que, pour tout événement *A*, on ait :

- $P(A) \geq 0$;
- $P(E) = 1$: probabilité de l'événement certain ;
- la probabilité de deux événements disjoints *A* et *B* est la somme des probabilités de ces événements : si $A \cap B = \varnothing$ alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Ces trois axiomes sont appelés : ''**axiomes de Kolmogorov**''.

3. Propriétés

a) $\boxed{\forall A, B \subset E : \quad A \subset B \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(B)}$

En effet : $A \subset B$, on en déduit que : $B = A \cup (B \cap \overline{A})$ et $A \cap B \cap \overline{A} = \phi$

$$P(B) = P(A) + \underbrace{P(B \cap \overline{A})}_{\text{la probabilité est un nombre positif}} \geq P(A)$$

b) $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$

En effet : $A \subset E \quad \Rightarrow \quad P(A) \leq P(E)$

$$P(A) \leq 1$$

c) $\boxed{P(\varnothing)=0}$

Considérons un événement quelconque *A.* On a

$$A\cap\varnothing=\varnothing \quad \text{et} \quad A\cup\varnothing=A$$

Donc

$$P(A\cup\varnothing)=P(A)+P(\varnothing)$$
$$P(A)=P(A)+P(\varnothing)$$
$$P(\varnothing)=0$$

d) $\boxed{\forall A\subset E:\quad P(\overline{A})=1-P(A)}$

En effet :

$$A\cap\overline{A}=\varnothing$$
$$A\cup\overline{A}=E$$

ce qui entraîne

$$P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$
$$P(E)=P(A)+P(\overline{A})$$
$$1=P(A)+P(\overline{A})$$
$$P(\overline{A})=1-P(A)$$

Exemples

- Dans l'expérience aléatoire d'un jet de dé : "obtenir un point pair" et "obtenir un point impair" sont deux événements contraires.
- Dans l'expérience du jet d'un dé, l'événement *A* "obtenir un 3" et l'événement *B* "obtenir un autre résultat que 3" sont contraires.

$$P(A)=\frac{1}{6} \qquad \text{et} \qquad P(B)=\frac{5}{6}$$

ce qui donne, comme prévu,

$$P(A)+P(B)=1$$

Application importante : probabilité de l'événement "au moins un"
L'événement *A* "obtenir au moins un …" est l'événement contraire de l'événement $\overline{A}$ "n'obtenir aucun …".
Donc $P(A)=1-P(\overline{A})$.
En pratique, il est souvent plus facile de calculer $P(\overline{A})$ et d'en tirer $P(A)$.

Exemple

Reprenons l'exemple 2 du début : l'expérience consiste à lancer 3 fois de suite une pièce de monnaie et à observer la face supérieure des jets consécutifs.

$$P(\text{obtenir au moins 1 fois "face"})=1-P(\text{ne pas obtenir "face"})=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

e) $\boxed{\forall A, B \subset E: \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$ (relation de Boole)

En effet : $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$ donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$ (1)

$B = (B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)$ donc $P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B)$ (2)

(1) $P(A \cup B) = P(A) + P(B \cap \overline{A})$

(2) $P(B) = P(B \cap \overline{A}) + P(A \cap B)$ donc $P(B \cap \overline{A}) = P(B) - P(A \cap B)$

Remplaçons $P(B \cap \overline{A})$ par sa valeur dans la relation (1) ; il vient :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

f) Généralisation du troisième axiome de Kolmogorov

Rappelons le troisième axiome de Kolmogorov :
$\forall\ A, B \subset E: \quad A \cap B = \varnothing \ \Rightarrow\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

On peut le généraliser :

$$\forall\ A_1, A_2, ..., A_n \subset E \ \ avec \ \ A_i \cap A_j = \phi,\ \forall\, i \neq j : i, j = 1, ..., n$$
$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

D. Équiprobabilité

Deux événements sont <u>équiprobables</u> lorsqu'ils ont la même probabilité de se produire.

Exemple
Lors du jet d'une pièce de monnaie, ''obtenir pile'' et ''obtenir face'' sont des événements équiprobables.

Dans le cas d'un univers des possibles $E = \{e_1, e_2, ... e_n\}$, $\{e_1\}, \{e_2\}, ..., \{e_n\}$ sont les événements élémentaires.

$$\{e_i\} \cap \{e_j\} = \varnothing \ ,\ \forall i \neq j \ :\ i, j = 1, ..., n .$$

En appliquant la généralisation du troisième axiome de Kolmogorov, on obtient :

$$P(E) = P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n) = 1$$

Si les événements sont équiprobables, on a

$$P(e_1) = P(e_2) = ... = P(e_n) = \frac{1}{n}$$

Considérons l'événement $A = \{e_1, e_2, ..., e_p\}$. On a

$$P(A) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + ... + P(\{e_p\})$$
$$P(A) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n} = \frac{p}{n}$$

p est le nombre de cas favorables à *A*, *n* est le nombre de cas possibles.

Dans le cas d’événements élémentaires équiprobables, la probabilité d’un événement se traduit par

$$\boxed{\text{probabilitÈ d'un ÈvÈnement} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}}$$

Cette règle porte le nom de "Règle de Laplace".

Exemples

1. La probabilité d’obtenir un point pair en jetant un dé est $\frac{3}{6}$.

2. La probabilité d’obtenir deux fois pile en jetant deux pièces de monnaie est $\frac{1}{4}$.

3. Lançons simultanément deux dés non pipés, l’un noir et l’autre blanc. On observe les points indiqués d'abord par le dé noir, puis par le dé blanc.

$$\begin{aligned} E = \{ & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\} \end{aligned}$$

Il y a donc 36 cas possibles.

- Quelle est la probabilité que la somme des points obtenus lors du lancement de deux dés soit 8 (événement *A*) ?

$$A = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}$$

D'où $$P(A) = \frac{5}{36}$$

- Quelle est la probabilité d'obtenir des points identiques lors du lancement de deux dés (événement *B*) ?

$$B = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$$

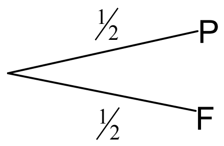
D'où $$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

4. L’exemple suivant montre le danger qu’il y a d’utiliser la formule des événements équiprobables sans réfléchir.

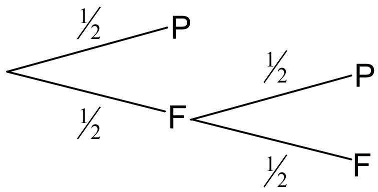
Un joueur lance une pièce de monnaie parfaitement symétrique.
Si le côté "pile" sort, le jeu s’arrête et le joueur a gagné.
Si le côté "face" sort, le joueur relance la pièce et le jeu s’arrête définitivement.
Si lors du second lancer le côté "pile" sort, le joueur a gagné, sinon il a perdu.
Quelle est la probabilité de gain du joueur ?

D'Alembert (1717-1783) étudia ce problème et en publia une solution fausse dans l'Encyclopédie : "il y a trois cas possibles dont deux sont favorables, la probabilité demandée vaut donc $\frac{2}{3}$". D'Alembert appliquait la formule des événements équiprobables alors qu'ils ne l'étaient pas.

Au premier jet, les probabilités se répartissent de la façon suivante :



Au deuxième jet, les probabilités se répartissent de la façon suivante :



La probabilité de gain pour le joueur est donc de $\frac{3}{4}$ et non de $\frac{2}{3}$.

5. Reprenons l'exemple 2 du début : l'expérience consiste à lancer 3 fois de suite une pièce de monnaie et à observer la face supérieure des jets consécutifs.
   $E = \{ (F,F,F) , (F,F,P) , (F,P,F) , (P,F,F) , (P,P,F) , (P,F,P) , (F,P,P) , (P,P,P) \}$

P (obtenir au moins une fois "face") = 1 - P (ne pas obtenir "face")

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

6. Dans une classe : 10 élèves suivent le cours de mathématiques
   5 élèves suivent le cours de biologie
   3 élèves suivent le cours de math et le cours de biologie

   La classe se compose de 20 élèves.

$$P(\text{suivre math ou bio}) = P(\text{math}) + P(\text{ bio}) - P(\text{math et bio}) = \frac{10}{20} + \frac{5}{20} - \frac{3}{20} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

Exercices :

1. Détermine les probabilités des événements suivants :
   a) on lance un dé non pipé (à 6 faces). Détermine la probabilité qu'il tombe sur un nombre pair.
   b) on tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Détermine la probabilité d'obtenir un cœur.
   c) on tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Détermine la probabilité d'obtenir un as.
   d) on tire une carte d'un jeu de 52 cartes. Détermine la probabilité d'obtenir un roi ou un pique.

2. Une urne contient des boules identiques : 3 boules rouges numérotées de 1 à 3 et 4 boules vertes numérotées de 1 à 4.
   On tire au hasard 2 boules successivement, sans remise, et on regarde la couleur et le numéro des boules tirées.
   Quelle est la probabilité d'obtenir une seule boule verte ?

3. D'un jeu de 52 cartes, on tire successivement 2 cartes sans remise et on note ces cartes. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un as ?

4. On fait 3 parties consécutives de pile ou face avec une pièce parfaite. Quelle est la probabilité d'obtenir:
   A = plus de « face » que de « pile »   B = deux fois « face » exactement
   C = pile au premier jet   D = 3 fois la même face

5. Deux hommes et trois femmes participent à un tournoi d'échecs. Les individus de même sexe ont des chances égales de gagner, mais un homme a 2 fois moins de chances de gagner qu'une femme.
   Calculer la probabilité pour qu'une femme gagne le tournoi

E. Probabilités conditionnelles

1. Définition

La probabilité conditionnelle d'un événement *A* par rapport à un événement *B* est la probabilité que *A* se réalise lorsque *B* est réalisé. On la note $P(A/B)$

$$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

Exemple

On lance deux dés, un blanc et un noir. Quelle est la probabilité que le dé blanc donne "1" si la somme des points obtenus sur les deux dés est strictement inférieure à 6 ?
Appelons *A* l'événement "le 1 du dé blanc apparaît" et *B* l'événement "la somme des points des deux dés est strictement inférieure à 6"

$$P(A)=\frac{6}{36} \quad , \quad P(B)=\frac{10}{36} \quad , \quad P(A\cap B)=\frac{4}{36}$$

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{4}{36}}{\frac{10}{36}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

2. Théorème de la multiplication[1]

La probabilité de la réalisation simultanée de deux événements vaut le produit de la probabilité de l'un par la probabilité conditionnelle de l'autre par rapport au premier.

$$\boxed{\begin{aligned}P(A\cap B)&=P(A).P(B/A)\\&=P(B).P(A/B)\end{aligned}}$$

Exemple 1

On tire successivement et sans remise deux cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer

1°) un as au premier tirage ?
2°) un deuxième as au deuxième tirage sachant qu'un as est déjà sorti ?
3°) deux as ?

Soient *A* l'événement « tirer un as au premier tirage », *B* l'événement « tirer un as au deuxième tirage » et *C* l'événement « tirer deux as ».

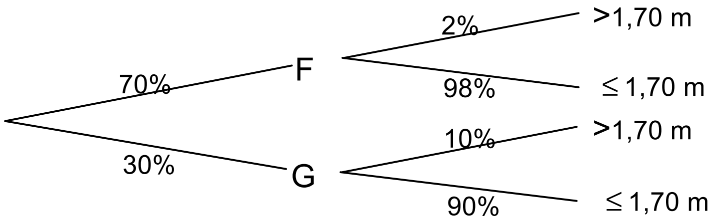
1°) $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

2°) $P(B/A)=\frac{3}{51}=\frac{1}{17}$.

3°) $P(C)=P(A\cap B)=P(A).P(B/A)=\frac{4}{52}.\frac{3}{51}=\frac{1}{221}$

[1] Ce théorème peut être généralisé sans difficulté.

Exemple 2
Dans un athénée de la région bruxelloise, 10% des garçons et 2% des filles mesurent plus de 1,70 m. On sait que 70% des élèves sont des filles. Si l'on prend un élève au hasard et que celui-ci mesure plus de 1,70 m , quelle est la probabilité que ce soit une fille ?



Soient *A* l'événement « mesurer plus de 1,70 m », *F* l'événement « être une fille » et *G* l'événement « être un garçon ».

$$P(F/A)=\frac{P(F\cap A)}{P(A)}=\frac{P(F).P(A/F)}{P(G).P(A/G)+P(F).P(A/F)}=\frac{70\%.2\%}{30\%.10\%+70\%.2\%}=\frac{140}{440}=0,318$$

F. Événements indépendants

1. Définition

Deux événements sont <u>indépendants</u> si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre et réciproquement.

A et B **sont indépendants si et seulement si** $P(A/B)=P(A)$ ou $P(B/A)=P(B)$

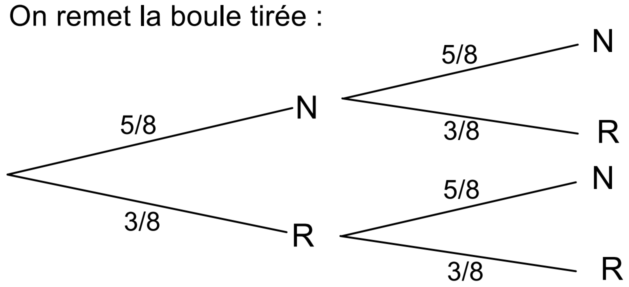
Le théorème de la multiplication devient alors:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A).P(B)}$$

2. Exemples

1. Considérons une urne contenant 5 boules noires et 3 boules rouges.
   Retirons successivement 2 boules de l'urne.
   Considérons les événements *A* et *B* suivants :
   A = "tirer une boule rouge au premier tirage"
   B = "tirer une boule rouge au deuxième tirage"
   Ces événements sont-ils indépendants?

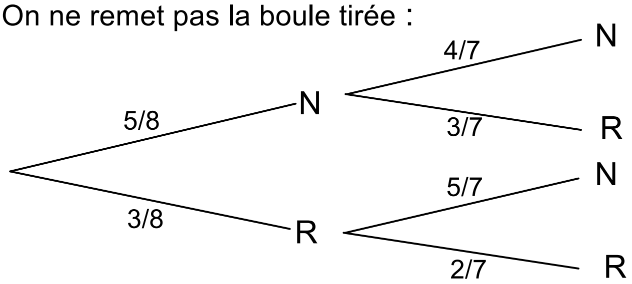
♦ On remet la boule tirée :



$$P(A)=\frac{3}{8}\ ;\ P(B)=\frac{5}{8}.\frac{3}{8}+\frac{3}{8}.\frac{3}{8}=\frac{3}{8}\ ;\ P(B/A)=\frac{3}{8}$$

Puisque $P(B/A)=P(B)$, les événements sont indépendants : la probabilité du deuxième tirage ne dépend pas du résultat du premier tirage.

♦ On ne remet pas la boule tirée :



$$P(A)=\frac{3}{8}\ ;\ P(B)=\frac{5}{8}.\frac{3}{7}+\frac{3}{8}.\frac{2}{7}=\frac{15+6}{56}=\frac{21}{56}=\frac{3}{8};\ P(B/A)=\frac{2}{7}$$

Les deux tirages sont dépendants : la probabilité du deuxième tirage dépend du résultat du premier tirage.

2. On tire successivement deux cartes dans un jeu de 52 cartes, en remettant la première carte tirée. Quelle est la probabilité de tirer 2 as?

A = "tirer un as au premier tirage" et *B* ="tirer un as au deuxième tirage"

A et *B* sont indépendants.

$$P(A)=P(B)=\frac{4}{52}$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{4}{52}\ .\ \frac{4}{52}=\frac{1}{169}$$

Exercices :

1. On jette trois fois un dé. Déterminer la probabilité d'obtenir:
a) trois fois le six. b) trois fois un nombre pair. c) le 1, puis le 2, puis le 3. d) le 1, le 2, le 3.

2. On tire deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Déterminer la probabilité d'obtenir:
   a) deux as en supposant que la 1° carte est remise dans le jeu.
   b) deux as en supposant que la 1° carte n'est pas remise dans le jeu.
   c) un as et un sept de cœur en supposant que la 1° carte est remise.
   d) un as et un sept de cœur en supposant que la 1° carte n'est pas remise.

3. On considère trois urnes identiques. La première contient 3 boules blanches et 1 boule noire, la deuxième 2 boules blanches et 3 boules noires et la troisième 3 boules blanches et 4 boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une boule dans cette urne. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche?

4. Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note: B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage" et B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage". Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

5. Un dé est pipé. La probabilité qu'il tombe sur la face 6 vaut 1/3, tandis que les cinq autres événements sont équiprobables. Déterminer la probabilité pour que:
   a) le dé tombe sur la face 1
   b) le dé tombe sur un nombre pair c) le dé tombe sur un nombre impair.

6. On jette 4 fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité:
   a) d'obtenir quatre fois pile? b) d'obtenir au moins une fois face?

7. Le jeune Eric, trois ans, s'amuse à taper sur les touches de son ordinateur.
Il frappe au hasard sur une touche du clavier, chaque touche ayant la même probabilité d'être frappée. Ce claver comporte 57 touches dont 26 représentent les 26 lettres de l'alphabet français.
   a) Quelle est la probabilité pour qu'il frappe une lettre ?
   b) Quelle est la probabilité pour qu'il frappe une lettre de son prénom ?

Eric frappe successivement 4 touches, distinctes ou non. Quelle est la probabilité des événements:
   c) Eric frappe son prénom.
   d) Eric frappe les 4 lettres de son prénom.
   e) Eric frappe 4 touches différentes.
   f) Eric frappe son prénom sachant qu'il a frappé 4 touches différentes.

8. Une urne contient 2 dés non truqués et un dé trafiqué de manière à obtenir 6 avec une probabilité de 0,5. On tire un dé d'une main innocente et on le lance une fois. On obtient 6.
   a) Quelle est la probabilité que le dé choisit soit truqué ?
   b) Même question si en le lançant deux fois on obtient un double 6.

9. On a mis au point un test de dépistage d'une maladie. Ce test est fiable à 95% pour une personne malade et à 80% pour une personne saine. Dans une population contaminée à 18%, on choisit une personne au hasard. On lui effectue le test, et on constate qu'il est positif.
   Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?

10. Un grossiste en appareils ménagers est approvisionné par trois marques, notées respectivement M_1, M_2 et M_3. La moitié des appareils de son stock provient de M_1, un huitième de M_2, et trois huitièmes de M_3.Ce grossiste sait que dans son stock, 13% des appareils de la marque M_1 sont rouge, que 5% des appareils de la marque M_2 sont rouges et que 10% des appareils de la marque M_3 le sont aussi.
    On choisit au hasard un appareil emballé dans le stock de ce grossiste :
    a) Quelle est la probabilité qu'il vienne de M_3 ?
    b) Quelle est la probabilité qu'il soit rouge sachant qu'il vienne de M_2 ?
    c) Quelle est la probabilité que l'appareil choisi ne soit pas de couleur rouge ?
    Après examen, on s'aperçoit que l'appareil choisi est rouge.
    d) Quelle est la probabilité qu'il soit de la marque M_1 ?

11. Une classe comporte 20 garçons dont la moitié a les yeux bleus et 10 filles dont la moitié a aussi les yeux bleus. Calculer la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard soit un garçon qui ait les yeux bleus.

12. Dans une école, *25%* des élèves échouent en mathématique, *15%* en chimie et 10% échouent à la fois en mathématique et en chimie. On choisit un élève au hasard:
    a) Si l'élève a échoué en chimie, quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en math?
    b) Si l'élève a échoué en math., quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en chimie?
    a) Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoué en mathématique ou en chimie?

13. Quelle est la probabilité pour que, parmi 23 personnes, deux au moins aient leur anniversaire le même jour? On suppose qu'il y a 365 jours et une égale répartition des naissances dans l'année. *(Aide: calculer d'abord la probabilité de l'événement contraire.)*

14. Un ascenseur charge 7 personnes au rez-de-chaussée et s'arrête à 10 étages. Quelle est la probabilité pour que, parmi ces 7 personnes; il n'y en ait pas deux qui descendent au même étage ?

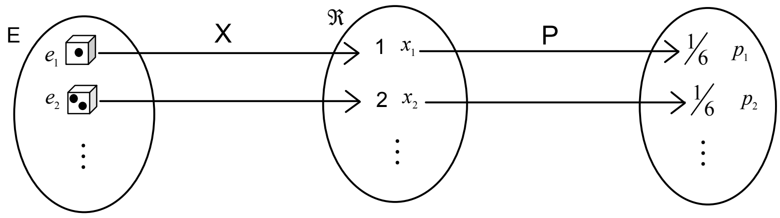
15. Un missile atteint sa cible avec une probabilité de 0,3.
    Combien de missiles faut-il tirer pour qu'il y ait une probabilité d'au moins 80 % d'atteindre la cible ?

G. Variable aléatoire

Considérons une expérience aléatoire dont l'ensemble fini des résultats est *E*.
A chacun des éléments e_i de *E* associons un nombre réel x_i.
On définit ainsi une fonction de *E* dans $\boldsymbol{R}$ appelée variable aléatoire et notée *X*.

Exemple du jet d'un dé.

$$X : E \to \boldsymbol{R}$$
$$e_i \to x_i$$



Une variable aléatoire est discrète si l'ensemble de ses valeurs possibles est fini ou dénombrable.
Dans le cas contraire elle est continue.

Exemples

On jette simultanément 4 pièces de monnaie indiscernables. On associe à chaque résultat le nombre de "face" obtenu. La variable aléatoire *X* ainsi définie peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4. Elle est discrète.

On jette simultanément 2 dés. On associe à chaque résultat la somme des points obtenus. La variable aléatoire *X* ainsi définie peut prendre les valeurs 2, 3,..,12. Elle est discrète.

On mesure les tailles d'un groupe d'individus se situant entre 145 cm et 200 cm. On associe à chaque résultat la taille obtenue. La variable aléatoire peut prendre des valeurs comprises entre 145 et 200. Elle est continue.

H. Variable aléatoire discrète

1. Distribution discrète de probabilité

La distribution de probabilité d'une variable aléatoire discrète est une fonction qui à x_i associe la probabilité p_i d'obtenir cette valeur : $p_i = P(X = x_i) \qquad i = 1,...,k$
où *k* est le nombre de résultats possibles.

La représentation graphique de la distribution de probabilité est un diagramme en bâtonnets.

Remarque

$$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

2. Fonction de répartition

En considérant les probabilités cumulées, on obtient la fonction de répartition définie par :

$$F : \boldsymbol{R} \to [0,1] \quad , \quad F(x) = P(X \le x).$$

La représentation graphique de la fonction de répartition est une fonction en escalier.

Reprenons les deux premiers **exemples**

1. La variable aléatoire X prend les valeurs 0, 1, 2, 3, 4.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16
$F(x_i)$	1/16	5/16	11/16	15/16	1

$$F(2)=P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=\frac{1}{16}+\frac{4}{16}+\frac{6}{16}=\frac{11}{16}$$

C'est la probabilité d'obtenir au plus deux fois face.

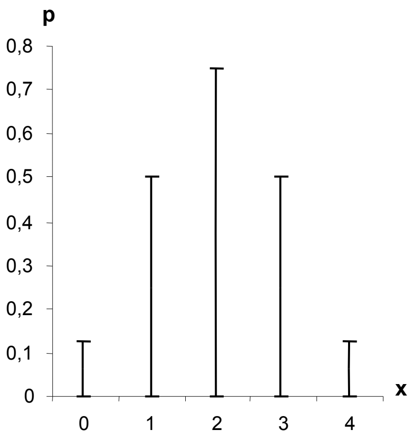
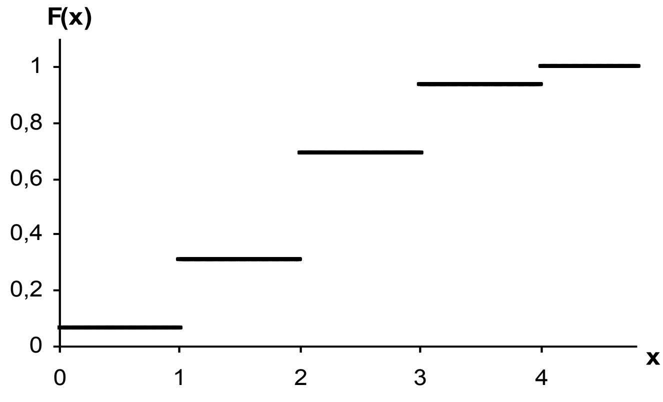


Diagramme en bâtons



fonction de répartition

2. La variable aléatoire X prend les valeurs 2, 3, 4, ..., 12.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$F(x_i)$	1/36	3/36	6/36	10/36	15/36	21/36	26/36	30/36	33/36	35/36	36/36

$$F(6)=P(X\leq 6)=P(X=2)+P(X=3)+...+P(X=6)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{4}{36}=\frac{15}{36}$$

C'est la probabilité que la somme des points obtenus sur les deux dés soit inférieure ou égale à 6.

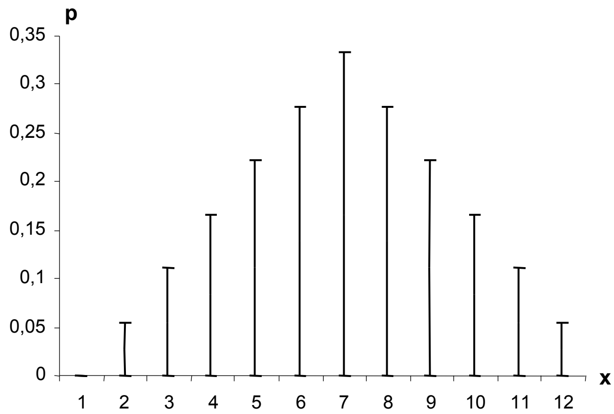


diagramme en bâtons

3. Paramètres d'une distribution discrète

Considérons une variable aléatoire discrète *X* prenant les valeurs x_i et les probabilités p_i correspondantes. $p_i = P(X = x_i) \quad i = 1,...,k$.

- La *moyenne m* ou *espérance mathématique E(X)* est le nombre réel défini par :

$$\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i\, x_i}$$

Remarque

Dans les jeux de hasard, si x_i représente un gain, l'espérance mathématique représente le gain moyen d'un joueur.

Le *mode* est la (ou les) valeur(s) de *X* donnant la probabilité maximum.

La *variance V(X)* traduit l'écart par rapport à la moyenne, elle est définie par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i.(x_i - E(X))^2$$

En pratique on utilisera plutôt l'expression suivante :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{k} p_i x_i^2 - [E(X)]^2$$

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

- L'écart type est la racine carrée de la variance : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

4. Exemples

1. Un joueur lance un dé :
   s'il fait 1, il perd 10 euros
   s'il fait 2, il perd 6 euros
   s'il fait 3 ou 4, il ne perd ni ne gagne
   s'il fait 5, il gagne 2 euros
   s'il fait 6, il gagne 20 euros .

On associe à chaque résultat du dé le gain correspondant. La variable aléatoire *X* ainsi définie peut prendre les valeurs : -10, -6, 0, 2, 20.

x_i	-10	-6	0	2	20
p_i	1/6	1/6	2/6	1/6	1/6
$p_i . x_i$	-10/6	-6/6	0	2/6	20/6

- $E(X) = \frac{-10}{6} + \frac{-6}{6} + \frac{2}{6} + \frac{20}{6} = \frac{6}{6} = 1$: ceci signifie que le joueur gagnera en moyenne 1 euro par partie.
- Mode : 0
- $V(X) = 89$
- $\sigma(X) = 9{,}43$

On constate donc que l'écart type représente une estimation de l'écart moyen entre le gain moyen et le gain réel.

2. Un joueur jette simultanément 4 pièces de monnaie : on observe le nombre de fois que ''face'' apparaît :
   s'il obtient 0 fois ''face'', il perd 3 euros
   s'il obtient 1 fois ''face'', il perd 1 euro
   s'il obtient 2 fois ''face'', il gagne 0 euro
   s'il obtient 3 fois ''face'', il gagne 2 euros
   s'il obtient 4 fois ''face'', il gagne 5 euros

On associe à chaque nombre de ''face'' obtenus le gain correspondant. La variable aléatoire *X* ainsi définie peut prendre les valeurs -3, -1, 0, 2, 5.

x_i	-3	-1	0	2	5
p_i	1/16	4/16	6/16	4/16	1/16
$p_i . x_i$	-3/16	-4/16	0	8/16	5/16

- $E(X) = \frac{-3}{16} + \frac{-4}{16} + \frac{8}{16} + \frac{5}{16} = \frac{6}{16} = 0{,}375$: ceci signifie que le joueur gagnera en moyenne 0,375 euros par partie.
- Mode : 0
- $V(X) = 3{,}234375$
- $\sigma(X) = 1{,}798$

EXERCICES

1. Les organisateurs d'une tombola de bienfaisance ont imprimé 1000 billets numérotés de 1 à 1000. Le règlement prévoit que 5 billets gagneront 500 €, 12 billets gagneront 100 €, 25 billets gagneront 30 €, 55 billets gagneront 10 € et les autres billets ne gagneront rien. Tous les billets ont étés réservés par des sympathisants.
   a) Quel doit être le prix d'un billet pour que cette tombola dégage un bénéfice de 5000 € ?
   b) Détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X donnant le gain espéré d'un billet.
   c) Calcule E(X), V(X) et σ(X)

2. Une urne contient huit boules blanches et deux boules rouges. Un joueur extrait simultanément trois boules de l'urne. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.
   A l'issue d'un tirage de trois boules :
   si aucune boule n'est rouge, le joueur perd 10 € ;
   si une seule boule est rouge, le joueur gagne 5 € ;
   si deux boules sont rouges, le joueur gagne 20 €.
   X est la variable qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue d'un tirage.
   a) Donner la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique E(X).
   Le joueur joue deux fois de suite selon les mêmes règles en remettant dans l'urne, après chaque tirage, les trois boules extraites. Y est la variable aléatoire qui associe le gain algébrique du joueur à l'issue des deux tirages.
   c) Donne les valeurs possibles pour Y.
   d) Détermine la probabilité que le joueur gagne exactement 10 € à l'issue des deux parties.

3. Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet. Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfums proposés.
   a) Calcule la probabilité de l'événement *A* : "les trois élèves choisissent des parfums deux à deux distincts"
   b) Soit *X* la variable aléatoire égale au nombre de parfums choisis par les trois élèves. Détermine la loi de probabilité de *X*. Calcule son espérance mathématique. Interprète.

4. Une rivière comporte une population d'écrevisses. Un écologiste réalise une expérience en disposant tous les 10 mètres une nasse à écrevisses. Il en place ainsi 25 et les numérote de 1 à 25. Sachant que pour cette rivière, il n'y a que 15% de chances de relever une nasse vide:
   a) Déterminer la probabilité de relever 3 nasses vides.
   b) Déterminer la probabilité de relever au moins une nasse vide.
   c) Déterminer la probabilité de ne relever aucune nasse vide.
   d) Déterminer la probabilité de relever au moins une nasse pleine.
   e) Calculer l'espérance mathématique de cette distribution.

5. Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablette, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

- Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :

  $G=$"le client achète une tablette gagnante"
  $U=$"le client gagne exactement une place de cinéma"
  $D=$"le client gagne exactement deux places de cinéma"

a) Donner $P(G)$, $P_G(U)$ et $P_G(D)$

b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client. Détermine la loi de probabilité de X. Calcule l'espérance mathématique de X.

- Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

d) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

e) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

f) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

6. On considère une urne contenant trois boules jaunes, deux boules bleues, une boule rouge et quatre boules vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire, au hasard, une boule de l'urne.
   Calcule la probabilité des événements suivants :

$J=$"tirer une boule jaune"
$B=$"tirer une boule bleue"
$R=$"tirer une boule rouge"
$V=$"tirer une boule verte"

En fonction de la couleur tirée, on se voit attribuer une somme d'argent selon la convention suivante : si la boule tirée est :

- rouge, on gagne 10 €
- verte, on gagne 2 €
- jaune ou bleue, on gagne 3 €

Soit X la variable aléatoire qui associe, à chaque tirage le gain réalisé.

a) Déduire : $P(X=2)$, $P(X=3)$ et $P(X=10)$.

b) Calcule l'espérance mathématique de X, sa variance puis son écart–type.

Maintenant, on gagne toujours 10 € si la boule tirée est rouge, 2 € si elle est verte mais on gagne 3 € si elle est jaune et m € si elle est bleue ; m désignant un réel positif.

d) Calcule m pour que le gain moyen espéré soit de 4,5 €.

I. La variable binomiale (discrète)

1. Définition

On considère une expérience aléatoire. Une ***épreuve de Bernoulli*** est une épreuve dans laquelle on ne s'intéresse qu'à la réalisation (succès) ou la non réalisation (échec) d'un événement *A* lié à cette épreuve : $P(A)+P(\overline{A})=1$

A se produit avec une probabilité *p* et donc $\overline{A}$ se produit avec une probabilité *q=1-p*.

Un schéma de Bernoulli est une suite de *n* épreuves de Bernoulli identiques, indépendantes entre elles avec la même probabilité de succès pour chacune d'elles.

2. Exemple

On lance un dé équilibré. On s'intéresse à l'événement *A* : ''obtenir un 6''.

$P(A)=\dfrac{1}{6}$ et $P(\overline{A})=\dfrac{5}{6}$ est une épreuve de Bernoulli.

Le lancement de ce dé 10 fois de suite donne un schéma de Bernoulli.

Distribution binomiale (ou loi binomiale)

On considère *n* répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli. A chaque répétition, l'événement *A* peut se produire avec une probabilité *p*. La variable aléatoire *X* est le nombre de réalisations de *A* au cours des *n* expériences. Elle peut prendre les valeurs 0, 1, 2, …, *n*. Dans l'exemple précédent, on s'intéresse au nombre de fois que l'on obtient le ''6'' comme résultat au cours des 10 lancers du dé.

La probabilité que *A* se réalise *k* fois lors des *n* répétitions est

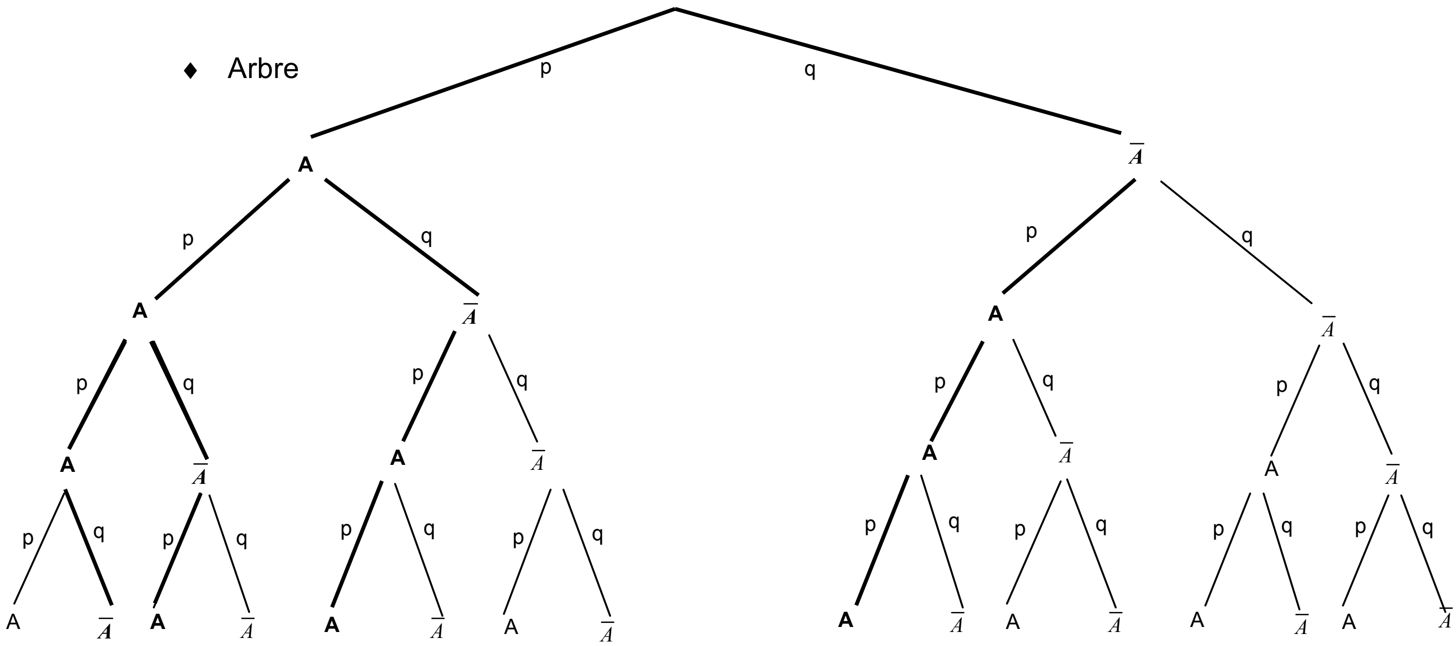
$$\boxed{P(X=k)=C_n^k\ p^k\ q^{n-k}}$$

En effet

- Il existe plusieurs manières de réaliser *k* fois *A* au cours des *n* répétitions de l'expérience : ce sont les combinaisons de *k* éléments choisis parmi *n* : C_n^k.
- Chacune de ces manières a une probabilité $p^k\ q^{n-k}$ de se produire : *A* se produit *k* fois et $\overline{A}$ se produit donc *n-k* fois (les événements sont indépendants).

La variable aléatoire *X* ainsi définie est appelée <u>*variable binomiale*</u> et est notée $\underline{B(n,p)}$, où *n* est le nombre d'expériences et *p* la probabilité de succès lors de chaque expérience.

- Arbre



On répète quatre fois la même expérience aléatoire. A chaque répétition, l'événement *A* peut se produire avec une probabilité *p* . On s'intéresse à la variable aléatoire *X* : ''nombre de réalisations de *A* au cours des quatre expériences''.

Par exemple, dans l'arbre : $P(X=3) = pppq + ppqp + pqpp + qppp = C_4^3 p^3 q^1 = 4p^3 q$

Exemple

Une boite contient 10 boules : 2 rouges et 8 noires.

On va tirer successivement 5 boules, <u>avec remise</u> de la boule tirée à chaque fois.

On a ainsi un schéma de Bernoulli. On s'intéresse à la variable aléatoire *X* ''nombre de boules noires obtenues''.

Quand on tire une boule, la probabilité qu'elle soit noire est de 0,8 et la probabilité qu'elle soit rouge est de 0,2.

La variable *X* est une variable binomiale : $B(5\,;\,0{,}8)$.

Les valeurs possibles de *X* sont : 0, 1, 2, 3, 4, 5.

- Probabilité d'obtenir 0 boule noire : il faut tirer successivement 5 boules rouges.

$$P(X=0) = (0{,}2)^5 = 0{,}00032$$

- Probabilité d'obtenir 1 boule noire (et 4 rouges) : on a $C_5^1 = 5$ manières d'obtenir une boule noire parmi les 5 tirages.

$$P(X=1) = C_5^1\,(0{,}8).(0{,}2)^4 = 0{,}0064$$

- Probabilité d'obtenir 2 boules noires (et 3 rouges) : on a $C_5^2 = 10$ manières d'obtenir 2 boules noires parmi les 5 tirages.

$$P(X=2) = C_5^2\,(0{,}8)^2.(0{,}2)^3 = 0{,}0512$$

- Probabilité d'obtenir 3 boules noires (et 2 rouges) :

$$P(X=3) = C_5^3\,(0{,}8)^3.(0{,}2)^2 = 0{,}2048$$

- Probabilité d'obtenir 4 boules noires (et 1 rouge) :

$$P(X=4) = C_5^4\,(0{,}8)^4.(0{,}2) = 0{,}4096$$

- Probabilité d'obtenir 5 boules noires (et 0 rouge) :

$$P(X=5) = (0{,}8)^5 = 0{,}32768$$

3. Paramètres de la distribution binomiale

♦ Moyenne ou espérance mathématique : $\boxed{E(X) = np}$

Elle représente le nombre moyen de succès au cours de n répétitions de l'expérience aléatoire.

Démonstration

Rappelons la formule du binôme de Newton : $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=1}^{n} k \,.\, P(X=k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \,.\, C_n^k \; p^k \; q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \,.\, \frac{n!}{k!.(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \; p^k \; q^{n-k} \\ &= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} \; q^{n-k} \end{aligned}$$

En posant $i = k-1$, on obtient :

$$\begin{aligned} E(X) &= np \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!\,(n-1-i)!} p^i \; q^{n-1-i} \\ &= np \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \; p^i \; (1-p)^{n-1-i} \end{aligned}$$

Grâce au binôme de Newton, cette expression devient

$$\begin{aligned} E(X) &= np \; \left(p + (1-p)\right)^{n-1} \\ &= np \end{aligned}$$

♦ Variance : $V(X) = n\,p\,q$

Elle représente la moyenne des carrés des écarts par rapport à la moyenne (même notion qu'en statistique)

♦ Ecart-type : $\sigma(X) = \sqrt{n\,p\,q}$

Exemple

Pour l'exemple précédent, on a

$$E(X) = n\,p = 5.0{,}8 = 4$$

En moyenne sur les 5 tirages on obtiendra 4 boules noires.

$$\sigma(X) = \sqrt{5.0{,}8.0{,}2} = 0{,}894$$

La moyenne des écarts à la moyenne est proche de 0,894.

EXERCICES

1. La probabilité pour qu'un nouveau-né soit un garçon est 0,5. Un couple a décidé d'avoir trois enfants. Quelle est la probabilité que ces enfants soient
   a) 3 filles
   b) 2 filles et 1 garçon
   c) une fille, puis un garçon, puis une fille.

2. On pose 8 questions à un candidat, les réponses étant "oui" ou "non". Ne connaissant aucune des réponses, le candidat répond au hasard.
   Quelle est la probabilité pour qu'il donne 6 réponses exactes?

3. Un étudiant doit répondre à 6 questions pour lesquelles on lui propose 5 réponses dont une seule est exacte.
   a) Ne connaissant aucune des réponses, il répond au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'il donne au moins 3 réponses correctes?
   b) Ayant étudié son cours, il a une probabilité de 0,7 de répondre correctement à chacune de ces questions. Quelle est la probabilité peur qu'il donne au moins 3 réponses correctes.

4. Une équipe a une probabilité de 2/3 de vaincre chaque fois qu'elle joue. Si l'équipe joue 4 fois, calculez la probabilité pour qu'elle gagne plus de la moitié des matchs.

5. La probabilité pour qu'un tireur atteigne une cible est de 1/4.
   a) en supposant qu'il tire 7 fois, quelle est la probabilité pour qu'il atteigne la cible au moins 2 fois?
   b) Combien de fois doit-il tirer pour que la probabilité d'atteindre la cible soit > à 2/3?

6. Une machine produit 20% de pièces défectueuses. On prend au hasard 4 pièces fabriquées par cette machine. Quelle est la probabilité pour que ce lot comprenne 0, 1, ou 2 pièces défectueuses?

7. Il a été constaté statistiquement que, sur une chaîne de montage donnée, sur 1000 appareils qui sortent, 5 sont défectueux. On prélève successivement 80 appareils dans la chaîne de montage. On suppose que la variable aléatoire donnant le nombre d'appareils défectueux suit une loi binomiale.
   Calcule la probabilité que sur les 80 appareils prélevés plus de deux appareils soient défectueux.

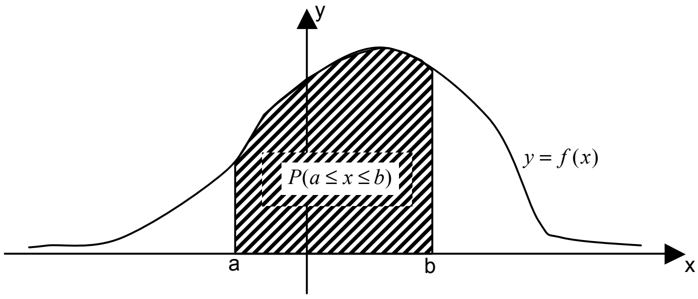
J. Variable aléatoire continue

1. Densité de probabilité

Reprenons l'exemple de la taille des individus. La variable aléatoire X ainsi obtenue est continue.

La représentation graphique de cette variable est une courbe continue appelée courbe de distribution de fréquence dont l'équation est donnée par : $y = f(x)$.

La fonction f est appelée densité de probabilité.



Cette courbe vérifie les propriétés suivantes

- $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Remarque
La probabilité pour que *x* prenne exactement une valeur donnée est nulle.

2. Fonction de répartition

La fonction de répartition d'une variable continue est définie par :

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

3. Paramètres d'une distribution continue

- moyenne : $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x.f(x)\,dx$
- variance : $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2.f(x)\,dx - (E(x))^2$
- écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

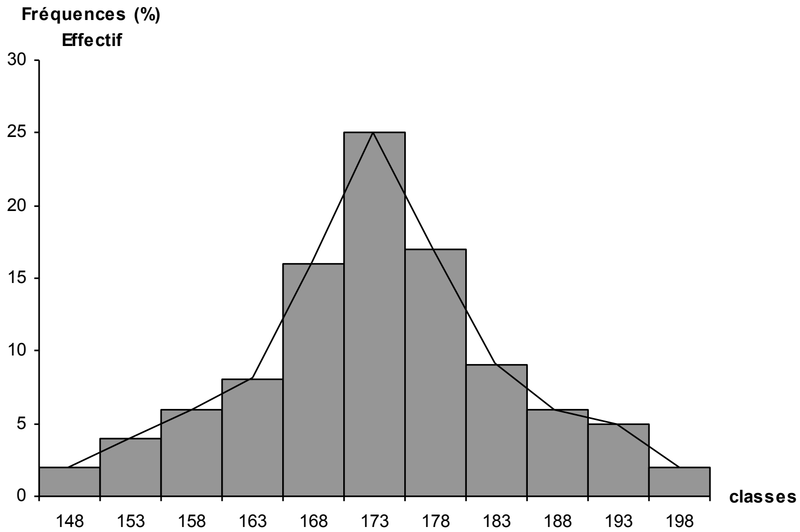
K. La variable normale (continue)

1. Exemple introductif

Une étude statistique sur les tailles des garçons de 15 à 18 ans (représentés par un échantillon de 100 garçons) a donné les résultats suivants :

Moyenne : $\mu = 173{,}35\ cm$
Écart-type : $\sigma = 10{,}64\ cm$

L'histogramme des fréquences et le polygone des fréquences se présentent comme suit :
Le polygone des fréquences ressemble à une courbe en cloche, presque symétrique par rapport à la droite d'équation : $x = 173$, c'est à dire presque la valeur de la moyenne de l'échantillon observé.



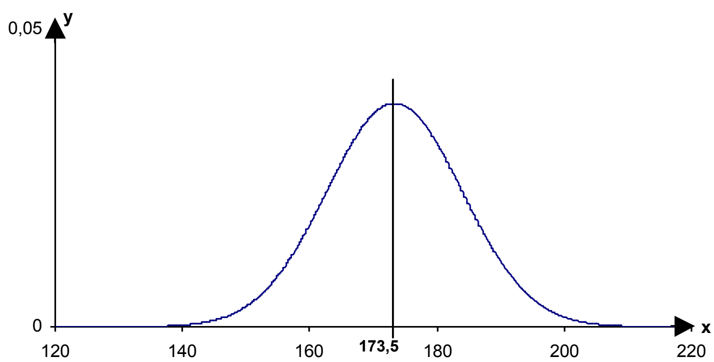
Si l'on augmente de plus en plus l'effectif total de l'échantillon, alors il devient proche de celui de la population entière. Dans ce cas là, le nombre de tailles observées étant élevé, on peut les répartir dans des classes dont l'amplitude est de plus en plus petite, le nombre de classes devenant de plus en plus grand.

A la limite, l'amplitude de chaque classe se réduit à un point de l'axe.

Le polygone des fréquences devient une courbe en cloche, appelée courbe normale ou courbe de Gauss, parfaitement symétrique par rapport à la moyenne.

Cette courbe sert de modèle mathématique pour la plupart des distributions de variables continues.

En augmentant la taille de l'échantillon dans l'exemple précédent, le polygone des fréquences donne la courbe de Gauss suivante :



2. Distribution normale (ou loi normale)

Une variable aléatoire continue est appelée **variable normale de moyenne μ et d'écart type σ** si sa fonction de densité est

$$y(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

où e = 2,71828… et π = 3,14159…

La loi ainsi définie est appelée **loi normale** et est notée $N(\mu, \sigma)$.

Dans cette expression de la densité de probabilité, x représente une valeur de la variable observée, y la fréquence de la valeur observée x, μ la moyenne de la distribution de probabilité et σ l'écart type.

La représentation graphique de cette fonction, quels que soient μ et σ, a toujours la forme caractéristique d'une cloche (voir paragraphe précédent). Rappelons cependant que :

- La courbe est symétrique par rapport à $x = \mu$;
- Elle admet un maximum en μ ;
- Elle admet Ox comme asymptote horizontale ;
- Elle a des points d'inflexion en μ - σ et en μ + σ ;
- Mode, moyenne et médiane coïncident.

3. Distribution normale centrée réduite

Parmi les lois normales, il en est une qui joue un rôle particulier : la loi normale centrée réduite pour laquelle $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, notée $N(0,1)$.

Toute loi normale $N(\mu, \sigma)$ peut être ramenée à une loi normale centrée réduite par le changement suivant : $\frac{X-\mu}{\sigma} = Z$.

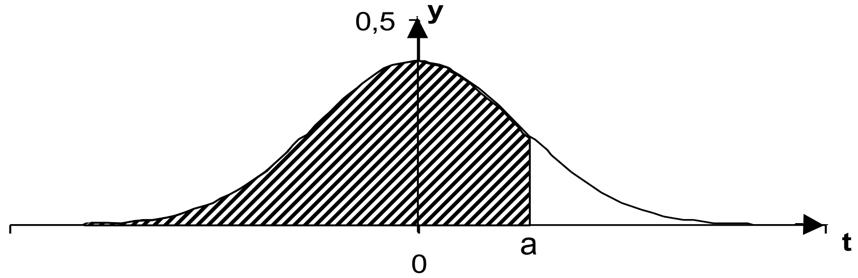
Pour obtenir la distribution de probabilité de la loi normale centrée réduite, on pose $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, $dt = \frac{dx}{\sigma}$.

La distribution de probabilité devient : $y(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

Cette fonction est définie sur $\left]-\infty, +\infty\right[$, elle est positive, en forme de "cloche" et symétrique par rapport à l'axe Oy.

On peut démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt = 1$, c'est à dire que l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses vaut 1.

P(Z < a) représente l'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $t = a$.



En pratique, il existe des tables qui donnent l'aire de la surface comprise entre la courbe normale centrée réduite, l'axe des abscisses et la droite d'équation $t = a$, c'est à dire la probabilité de trouver une observation inférieure à la valeur a.

Exemple

Considérons que la taille des individus est une variable aléatoire *X* qui suit une loi normale de moyenne $\mu = 173{,}35$ et d'écart-type $\sigma = 10{,}64$: $X \approx N(173{,}35\ ;\ 10{,}64)$.

Quelle est la probabilité qu'un individu mesure moins de 180 cm, moins de 170 cm, plus de 180 cm, entre 170 et 180 cm ?

- $P(X < 180) = P(Z < \frac{180 - 173{,}35}{10{,}64})$ = *P(Z < 0,63)* = 0,7356 = 73, 57 %

73,57 % des individus mesurent moins de 180 cm.

- $P(X < 170) = P(Z < \frac{170 - 173{,}35}{10{,}64}) = P(Z < -0{,}31)$ = *P(Z > 0,31) = 1 – P(Z < 0,31) =* 1 – 0,6217 = 0,3783 = 37, 83 %

37,83 % des individus mesurent moins de 170 cm.

- $P(X > 180) = P(Z > \frac{180 - 173{,}35}{10{,}64}) = P(Z > 0{,}63)$ = 1 – *P(Z* < 0,63) = 1 – 0,7357 = 0,2643 = 26,43%

26,43 % des individus mesurent plus de 180 cm.

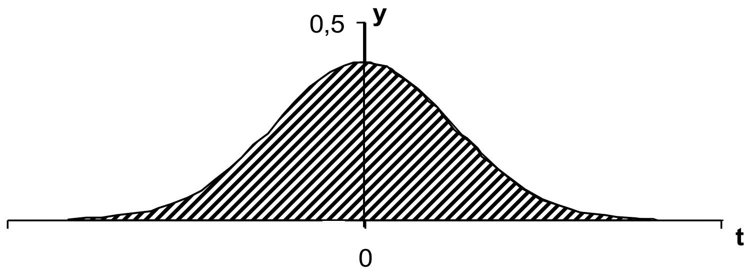
$$P(170 < X < 180) = P(\frac{170 - 173{,}35}{10{,}64} < Z < \frac{180 - 173{,}35}{10{,}64}) = P(-0{,}31 < Z < 0{,}63)$$

- $= P(Z < 0{,}63) - P(Z < -0{,}31) = P(Z < 0{,}63) - P(Z > 0{,}31)$
$= P(Z < 0{,}63) - [1 - P(Z < 0{,}31)] = P(Z < 0{,}63) - 1 + P(Z < 0{,}31)$
$= 0{,}7356 - 1 + 0{,}6217 = 0{,}3574 = 35{,}74\%$

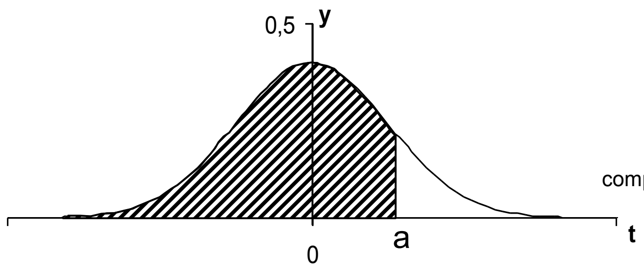
35,74 % des individus mesurent entre 170 et 180 cm.

Note

C'est au dix-huitième siècle que les scientifiques remarquèrent une étonnante régularité dans les erreurs de mesure en laboratoire ; ils étudièrent cette régularité et appelèrent la distribution obtenue « Distribution normale ». Elle est aussi appelée « Distribution de Gauss » car c'est ce mathématicien qui l'a découverte.

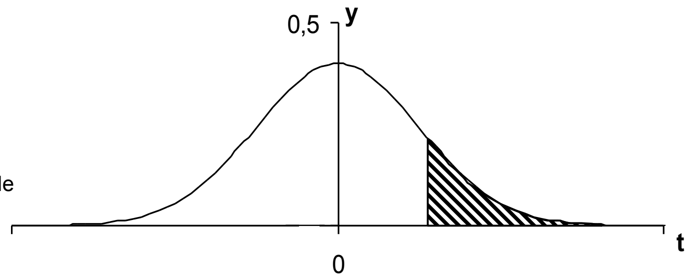


$= P(-\infty < N < +\infty) = 1$

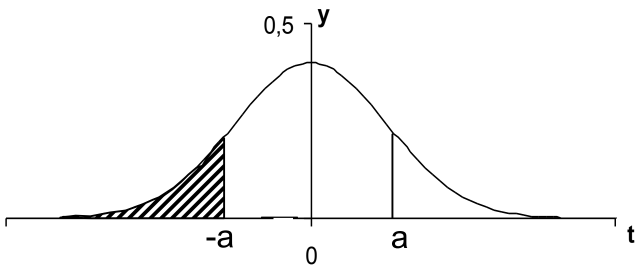


$= P(N < a)$

complémentaire de

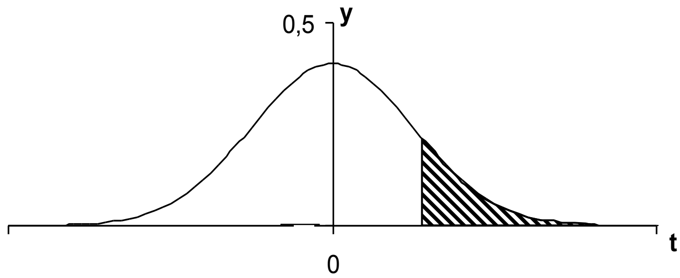


$= P(N > a) = 1 - P(N < a)$

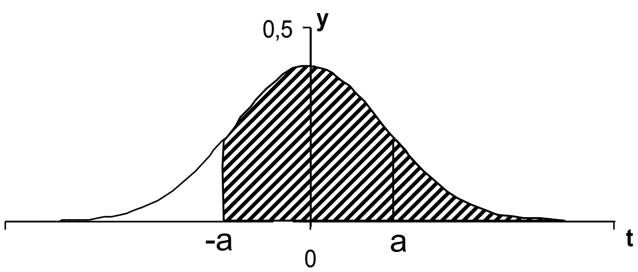


$= P(N < -a)$

équivalent à

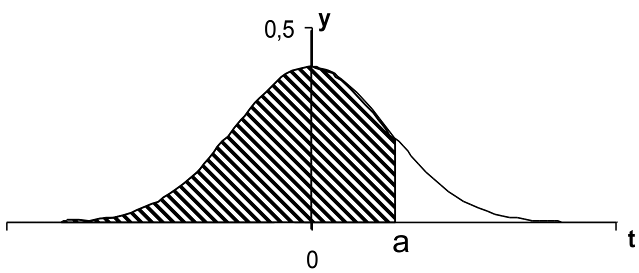


$= P(N > a) = 1 - P(N < a)$



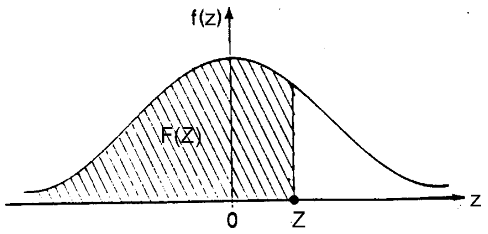
$= P(N > -a)$

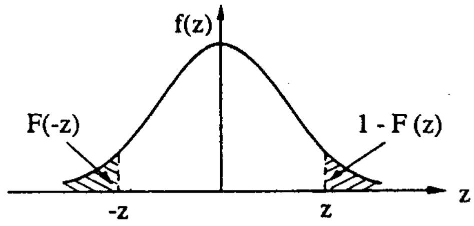
équivalent à



$= P(N < a)$

VALEURS DE LA FONCTION DE REPARTITION DE LA DISTRIBUTION NORMALE REDUITE





z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.5985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9771	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Remarques :

- $F(-z) = 1 - F(z)$
- $P(a \leqslant \zeta \leqslant b) = F(b) - F(a)$ $(a \leqslant b)$
- Pour $z \geqslant 4$, la précision de la table ne permet plus de connaître la valeur exacte de $F(z)$ (exemples : $F(4) = 0.9999683$; $F(4{,}5) = 0.9999966$; $F(5) = 0.999999713$), qui est donc arrondie à 1.

EXERCICES

1. La moyenne des capacités respiratoires d'un échantillon de 400 personnes du sexe masculin est de 3,7 l, avec un écart-type de 0,7 l. Sachant que les capacités respiratoires sont distribuées suivant une loi normale, combien peut-on s'attendre à trouver de ces personnes ayant une capacité respiratoire comprise entre 3 l et 4,4 l ?

2. Une étude faite par un fabriquant de lampes électriques a montré que les durées de vie des lampes se répartissent approximativement suivant une loi de Laplace Gauss, la moyenne de vie étant 1200 heures et l'écart type étant 180 heures.
On considère une installation de 10000 lampes neuves.

a) Combien peut-on prévoir de lampes hors d'usage au bout de 1000 heures?

b) Combien peut-on prévoir qu'il y aura de lampes qui deviendront hors d'usage entre la 1000° et la 1500° heure?

c) Au bout de combien d'heures y aura-t-il 10% des lampes hors d'usage?

3. Des œufs ont un poids moyen de 50 g avec un écart-type de 5 g. On désire vendre ces œufs à des prix dépendant de leur poids de manière que 20% des œufs soient vendus à 0,4 €, 50% à 0,3 € et 30% à 0,2 €. Entre quels poids doivent se situer les œufs vendus à 0,3 € ?

4. Une entreprise fabrique des pièces cylindriques en acier en grande série. Leur diamètre doit mesurer 6 cm avec une tolérance de 0,01 cm. A partir d'un échantillon, on a établi que le diamètre moyen des pièces était de 6 cm avec un écart-type de 0,008 cm.
a) Pour un lot déterminé, calculer le pourcentage des pièces dont le diamètre est:

1) inférieur à 6,008 cm
2) supérieur à 6,008 cm
3) inférieur à 5,995 cm
4) compris entre 5,99 cm et 6,01 cm

b) Rechercher entre quelles limites se situe 70% de la production.

5. La note moyenne d'un examen final est de 72 et l'écart type correspondant vaut 9.
10 % des meilleurs étudiants ont reçu la note "A".
Quelle est la note minimale des élèves ayant reçu la note "A" ?

6. Le diamètre intérieur moyen d'un échantillon de 200 rondelles produites par une machine est égal à 1,275 cm d'écart type 0,013 cm. L'usage que l'on fait de ces rondelles nécessite que le diamètre varie entre des bornes de tolérance de 1,260 cm à 1,290 cm, autrement les rondelles sont considérées comme défectueuses. Déterminer le pourcentage de rondelles défectueuses produites par la machine, en supposant que ces diamètres soient normalement distribués.