LES NOMBRES COMPLEXES

1. Introduction et petit historique

Considérons les équations suivantes :

$x+3=0$ (1) $\qquad 2x+5=0$ (2) $\qquad x^2-2=0$ (3) $\qquad x^2+4=0$ (4)

- Dans IN, l'équation (1) n'a pas de solution. On lève cette impossibilité en introduisant les entiers négatifs : dans Z, cette équation a une solution : **-3**
- Dans Z, l'équation (2) n'a pas de solution. On lève cette impossibilité en introduisant les fractions : dans Q, cette équation a une solution : $-5/2$
- Dans Q, l'équation (3) n'a pas de solution. On lève cette impossibilité en introduisant les irrationnels : dans IR, cette équation a deux solutions : $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$
- Dans IR, l'équation (4) n'a pas de solution. Pour lever cette impossibilité, nous allons construire un nouvel ensemble de nombres : l'ensemble C des nombres complexes dans lequel cette équation a des solutions, c'est à dire tel que le carré d'un nombre peut être réel négatif .

Historiquement, c'est l'étude des formules de résolution des équations du 3° degré qui est à la base de l'introduction des nombres complexes….

Au début du XVI[ème] siècle, le mathématicien Scipione dal Ferro, propose une formule donnant une solution de l'équation du 3[ème] degré $x^3+px=q$:

$$x=\sqrt[3]{\frac{q-\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{q+\sqrt{q^2+4p^3/27}}{2}}$$

A la fin du XVI[ème] siècle, le mathématicien Bombelli applique cette formule à l'équation $x^3-15x=4$.
Il obtient littéralement :

$$x=\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$$

Cette écriture n'a, a priori, pas de sens puisqu'on ne sait pas ce que représente le symbole noté $\sqrt{-1}$.
Mais Bombelli va plus loin. Il remarque, en utilisant les règles usuelles de calcul que :

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3=2+11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \left(2-\sqrt{-1}\right)^3=2-11\sqrt{-1}$$

Si bien qu'il obtient finalement : $\qquad x=2+\sqrt{-1}+2-\sqrt{-1}=4$

Or, $x=4$ est bien une solution de l'équation $x^3-15x=4$.
Une question naturelle s'est alors posée : peut-on légitimement calculer avec des symboles imaginaires comme ci-dessus ? C'est ainsi qu'est née la théorie des nombres complexes...

Il n'existait pas de carré strictement négatif. Pourtant au XVI° siècle, les algébristes italiens ont du utiliser des racines carrées de nombres négatifs comme intermédiaires commode de calcul dans de nombreux cas pour résoudre certaines équations du 3° degré.
Depuis le début du XVII° siècle, les mathématiciens utilisaient avec une confiance croissante les nombres Imaginaires, plus tard appelés nombres Complexes.
Ce sont les mathématiciens du XIX° siècle qui ont construit ces nombres et leur ont donné une réalité mathématique.

Petite histoire des équations du 3° degré

*En **1 494**, le moine franciscain Paccioli a imprimé le premier livre d'algèbre intitulé la "**Summa**". Il y reprit tous les travaux des Arabes. On y trouve la résolution complète des équations du premier et deuxième degré. Il pensait que les équations du 3° degré étaient insolubles par la méthode algébrique.*
*De **1 501** à **1 502,** il enseigna les mathématiques à l'université de Bologne. Il y rencontra un autre professeur de mathématique : Scipione del Ferro. Il lui fit part de sa conviction sur l'insolubilité des équations du 3° degré. C'est alors que Scipione s'intéressa au problème.*
*En **1 515**, après le départ de Paccioli de la faculté de Bologne, Scipione découvrit enfin la méthode algébrique de résolution des équations du 3° degré. Plutôt que la publier, il la nota sur son bloc-notes.*
*En **1 526**, C'est son gendre, Hannibal Nave (lui aussi professeur de mathématique), qui hérita du bloc-notes à la mort de Scipione. Sur son lit de mort, il ne confia à son étudiant Fior, qu'une partie de la méthode. Dès lors Fior commença à se vanter qu'il était capable de résoudre toutes les équations du 3° degré et lança des défis aux mathématiciens.*
*En **1 535**, Tartaglia releva le défi algébrique et une sorte de duel s'engagea entre les deux hommes. Chacun déposa une liste de 30 problèmes chez un notaire ainsi qu'une somme d'argent. Celui qui, dans les 40 jours, aurait résolu le plus de problèmes serait désigné vainqueur et remporterait la somme. Tartaglia découvrit à son tour la méthode et résolut les 30 équations alors que Fior n'en résolut que 10. Comme Tartaglia avait résolu le plus de problème, il fût reconnu comme l'inventeur de la formule de résolution des équations du 3° degré. Cette méthode de résolution resta secrète car Tartaglia ne la publia pas. En tant que conférencier de mathématique à la fondation Piatti de Milan, Cardan connaissait le problème. Avant le défit Fior-Tartaglia, il était d'accord avec la "**Summa**" de Paccioli qui déclarait que la résolution algébrique des équations du 3° degré était impossible.*
Très intrigué après le défi, il essaya de découvrir seul la méthode mais en vain. Il contacta Tartaglia et lui demanda de lui confier sa méthode en lui promettant de garder le secret. Tartaglia refusa.
*En colère, Cardan écrivit de nouveau à Tartaglia lui exprimant sa profonde amertume et lui proposa de le présenter au marquis del Vasto un des plus puissant mécène après l'empereur de Milan s'il acceptait de lui révéler sa méthode. Après réception de la lettre, Tartaglia révisa sa position, réalisant que l'appui du gouvernement milanais pouvait être une aide non négligeable à son ascension sociale. Il répondit amicalement à Cardan lui suggérant d'organiser une entrevue avec le marquis lors de sa prochaine visite à Milan. En **1 539**, Tartaglia quitta Venise pour Milan. A son grand désespoir, l'empereur ainsi que le marquis del Vasto s'étaient absentés. Tartaglia donna son accord pour révéler sa méthode à Cardan à condition qu'il jure de ne jamais la divulguer. Cardan jura et Tartaglia lui révéla sa méthode sous forme de poème pour aider à protéger le secret. En contre-partie il obtint de Cardan une lettre de recommandation auprès du marquis. N'osant pas se présenter seul, il retourna frustré à Venise se demandant s'il n'avait pas eu tort de dévoiler son secret. En **1 540**, grâce à la formule de Tartaglia, Ferrari l'assistant de Cardan découvre la méthode générale de résolution des équations du 4° degré.*
*En **1 543**, Cardan et Ferrari se rendirent à Bologne et apprirent de Hannibal della Nave que Scipione del Ferro avait résolu bien avant Tartaglia les équations de degré 3. Pour le leur prouver, il leur confia le bloc-notes du feu Del Ferro. Cardan pensa que bien qu'il ait juré de ne jamais révéler la méthode de Tartaglia, personne ne l'empêcherait de publier celle de Del Ferro. En **1 545**, Cardan publia "**Arts Magna**" bien connu pour contenir la démonstration de la méthode algébrique permettant de résoudre les équations du 3° et 4° degré. Depuis lors, la formule de résolution des équations du 3° degré s'appelle formule de Cardan!!! Tartaglia fut furieux quand il découvrit que Cardan avait transgressé sa promesse.*
*En **1 546**, Tartaglia publia un livre "**Nouveaux problèmes et inventions**" dans lequel il révélait sa version de l'histoire et sans cacher le parjure de Cardan. Grâce à son "**Arts Magna**", Cardan était devenu intouchable. En **1 548**, Tartaglia reçut une importante proposition de conférencier à Brescia, sa ville natale. Afin d'établir ses aptitudes pour ce poste, Tartaglia fut invité à Milan pour un face à face avec Ferrari son concurrent. Le 10 août, le défi eut lieu dans l'église des frères Zoccolanti sous les yeux des célébrités milanaises dont l'empereur. Malgré son inexpérience en public, Ferrari fit une meilleure prestation que Tartaglia qui déclara forfait. En **1 560**, Bombelli reprit du vivant de Cardan dans son "**Algebra**", les travaux de ce dernier. Il remarqua que lorsque la formule de Cardan aboutissait à un discriminant négatif, la méthode géométrique donnait une solution réelle positive. Il sera le premier à utiliser dans ses calculs, à titre transitoire, des racines carrées imaginaires de nombres négatifs pour obtenir finalement la solution réelle tant recherchée. C'est sa résolution des équations du 3° degré qui a été le point de départ de la construction du corps des nombres complexes. Il arriva à la conclusion que toute équation du 3° degré possédait au moins une solution réelle.*

2. Définitions

1° approche

Définition : Un nombre complexe est un nombre de la forme :

Z = a + bi avec a et b deux nombres réels
et **i** nombre imaginaire dont le carré égale –1

$$i^2 = -1 \qquad i \notin IR$$

a est la **partie réelle** du nombre complexe **Z**, tandis que b est la **partie imaginaire** du nombre complexe **Z**.
On note a=Re(Z) et b=Im(Z)

Exemples : $Z_1 = 3 + 2\mathbf{i}$; $Z_2 = -3\mathbf{i}$

On a : $\mathrm{Re}(Z_1) = 3$; $\mathrm{Im}(Z_1) = 2$; $\mathrm{Re}(Z_2) = 0$; $\mathrm{Im}(Z_2) = -3$

Attention ! **La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre réel !**

Humour : pourquoi la vie des Hommes est-elle complexe ? Car elle possède une partie réelle et une partie imaginaire.

Si a = 0, on obtient un nombre complexe pur. Si b = 0, on obtient un nombre réel.

L'ensemble des nombres complexes est noté par C.
On a donc :

$$\boxed{C = \{\, a + bi \ \text{ avec } a, b \in IR \,\}}$$

Dans cet ensemble, on définit :

- L'égalité de deux nombres complexes :
$$a + b\,i = a' + b'\,i \iff a = a' \text{ et } b = b'$$
- L'addition de deux nombres complexes :
$$(a + b\,i) + (a' + b'\,i) = (a + a') + (b + b')\,i$$
- La multiplication de deux nombres complexes :
$$(a + b\,i) \,.\, (a' + b'\,i) = a\,a' + ab'i + a'bi + bb'i^2$$
$$(a + b\,i) \,.\, (a' + b'\,i) = (aa' - bb') + (ab'+a'b)\,i$$

A partir de cela, on montre que :

$$\boxed{C,+ \text{ est un groupe commutatif}}$$

On pose $C_0 = C \setminus \{0\}$
$C_0 = \{\, a + bi \ \text{ avec } a, b \in IR \text{ et } a \neq 0 \text{ et } b \neq 0 \,\}$
$C_0 = \{\, a + bi \ \text{ avec } a, b \in IR \text{ et } a^2+b^2 \neq 0 \,\}$

On vérifie que :

$$\boxed{C_0, \bullet \text{ est un groupe commutatif}}$$

On peut en conclure que :

$$\boxed{C, +, \bullet \text{ est un corps commutatif}}$$

2° approche

On peut aussi définir un nombre complexe comme un couple (a,b) de nombres réels.
C est dés lors l'ensemble des couples réels (a,b) avec $a,b \in IR$

$$\boxed{C = \{\ \mathbf{(a\ ,\ b)\quad avec\ \ a,\ b\ \in\ IR}\ \}}$$

L'ensemble C peut être muni de deux lois :
une addition : $\mathbf{(a\ ,\ b) + (a'\ ,\ b') = (a+a'\ ,\ b+b')}$
une multiplication : $\mathbf{(a\ ,\ b) \bullet (a'\ ,\ b') = (aa' - bb',\ a'b + ab')}$

Dans cette approche, le neutre de la multiplication est le couple $(1,0)$
On pose $\mathbf{i = (0,1)}$
Dés lors $\mathbf{i^2 = (0,1) \bullet (0,1) = (-1,0) = -\ (1,0) = -1}$

3° approche

On peut aussi définir un nombre complexe comme une matrice carrée 2 lignes 2 colonnes :
On pose :

$$a + bi = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

C est dés lors l'ensemble des matrices carrées 2x2 $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ avec a et b $\in$ IR

L'ensemble C peut être muni de deux lois :

une addition : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & -b-b' \\ b+b' & a+a' \end{pmatrix}$

une multiplication : $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} a' & -b' \\ b' & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa'-bb' & -a'b-ab' \\ a'b+ab' & aa'-bb' \end{pmatrix}$

Dans cette approche, le neutre de la multiplication est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On pose $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Dés lors $\mathbf{i^2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{= -1}$

3. Calcul dans C

3.1 Addition (et soustraction) dans C

Exemples :

$1)\ (1+i)+(3-2i)=$

$2)\ 2i-(3+2i)=$

$3)\ (3+2i)-(5-4i)=$

3.2 Multiplication dans C

Exemples :

$1)\ (2-3i).(4+5i)=$

$2)\ (4-3i)^2=$

$3)\ i.\big((2-3i)-(-5+2i)\big)=$

$4)\ (-5+3i).(-5-3i)=$

Exercices :

$Z_1 = 3+2\mathbf{i}$ et $Z_2 = 2-\mathbf{i}$; calculer Z_1+Z_2 ; $Z_1 \times Z_2$; $Z_1 - Z_2$; $Z_1 + 2Z_2$; $2Z_1 - 3Z_2$; Z^2.

3.3 Inverse d'un nombre complexe

Soit $z = a+bi$, un nombre complexe. On cherche z^{-1} tel que $z.z^{-1} = 1$

$$z.z^{-1} = 1 \Leftrightarrow z^{-1} = \frac{1}{z}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a+bi}.\frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$\boxed{z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i}$$

Pour écrire les nombres complexes fractionnaires sous la forme a+bi, on multiplie le numérateur et le dénominateur par la quantité conjugué

Exemples : Déterminer l'inverse des nombres complexes suivants :

$1)\ 3+2i$

$2)\ 2-i$

$3)\ i$

3.4 Division de deux nombres complexes

Pour diviser deux nombres complexes, on utilise la relation suivante : $\frac{z_1}{z_2} = z_1 . \frac{1}{z_2}$

Exemples : Effectuer les divisions suivantes :

$1) \frac{3-i}{1+2i} =$

$2) \frac{2+3i}{1-i} =$

$3) \frac{3-i}{5+i} =$

$4) \frac{3-2i}{i} =$

3.5 Puissances d'un nombre complexe

On a :

$$\begin{array}{llll} i^0 = 1 & i^1 = i & i^2 = -1 & i^3 = -i \\ i^4 = 1 & i^5 = i & i^6 = -1 & i^7 = -i \\ i^{4n} = 1 & i^{4n+1} = i & i^{4n+2} = -1 & i^{4n+3} = -i \end{array}$$

Exemples : Effectuer:

$1) (i+2)^3 =$

$2) (1+2i)^2 . (1+i) =$

$3) (\sqrt{2}+i)^3$

$4) (a+bi)^2 =$

3.6 Racine carrée d'un nombre complexe

Définition :

z est une racine carrée de a + bi

SSI

$z^2 = a + bi$

Exemples : Déterminer les racines carrées des nombres complexes :

1) 9

2) -1

3) $5+12i$

4) $-7+24i$

Exercices : Déterminer les racines carrées des nombres complexes :

1) $15+8i$ **2)** $48-14i$ **3)** i **4)** $-1+2\sqrt{2}i$

On peut généraliser et conclure :

Tout nombre complexe (non nul), a deux racines carrées (opposées)

3.7 Equation du second degré dans C

Résolution de **$az^2+bz+c=0$** avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$

On détermine $\Delta=b^2-4ac$. Δ possède deux racines carrées δ_1 et δ_2.
Les solutions de l'équation **$az^2+bz+c=0$** sont données par :

$$z_1 = \frac{-b+\delta_1}{2a} \qquad z_2 = \frac{-b+\delta_2}{2a}$$

Dans C, toute équation du second degré possède deux racines (distinctes ou non).

Exercices : Résoudre dans C, les équations suivantes:

1) $z^2 - 5z + 6 = 0$	6) $z^2 - 8z + (16 - 2i) = 0$
2) $z^2 - 2z + 5 = 0$	7) $z^2 + 3iz + (i - 3) = 0$
3) $2z^2 + 2z + 5 = 0$	8) $iz^2 - (1+i)z + 2(1-i) = 0$
4) $\frac{z^2}{2} + (i-4)z + (5-10i) = 0$	9) $z^4 - 3z^2 - 4 = 0$
5) $z^2 - 10z + 26 = 0$	10) $iz^4 + 2z^2 - 5iz^2 + 50 = 0$

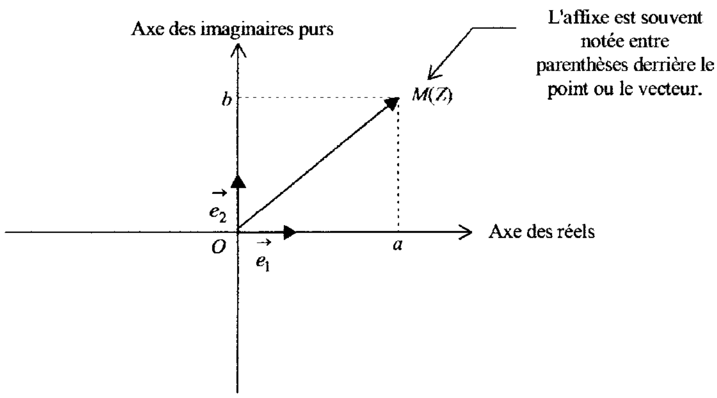
4. Représentation géométrique des nombres complexes

Ayant choisi dans le plan Π un repère orthonormé **(O, $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$),** on représente le nombre complexe **Z =a + bi** par le point **M** de coordonnées **(a ; b)** ou encore par le vecteur $\vec{OM}$.

Vocabulaire :

- Le point M(a ;b) s'appelle l'image du nombre complexe Z = a + bi
- Le nombre complexe Z = a + bi s'appelle l'affixe du point M(a ;b) (« Affixe » est un nom féminin)
- On note souvent Z = affixe(M) ou Z=aff(M)
- Lorsque le plan rapporté à un repère orthonormé représente l'ensemble des nombres complexes, il porte le nom de **plan de Gauss**

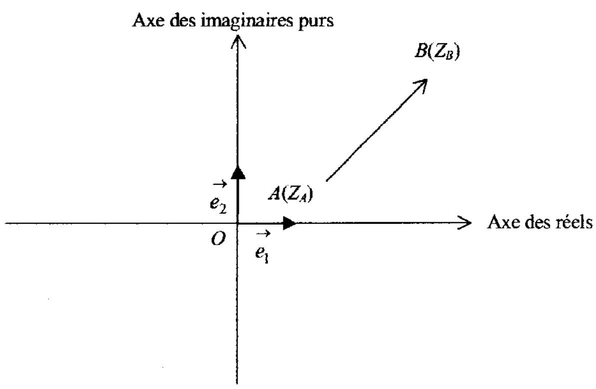
Exemple : si Z = -5 -2i, l'image de Z est le point de coordonnées (-5 ;-2)



Question : quelle est l'affixe de $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $-\vec{e_1}$ et $-\vec{e_2}$?

Propriété : Si Z_A est l'affixe de A et Z_B est l'affixe de B, alors l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ est $Z_B - Z_A$

$$\mathrm{aff}\left(\vec{AB}\right) = Z_B - Z_A$$



Exemple : l'affixe du vecteur $\vec{AB}$ avec $A(3 ; 5)$ et $B(5 ; 8)$ est $Z = 2 + 3\mathbf{i}$.

5. Conjugué d'un nombre complexe

5.1. Définition :

Le nombre complexe conjugué de $\mathbf{Z = a + bi}$ est le nombre complexe $\mathbf{\overline{Z} = a - bi}$
On dit que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{\overline{Z}}$ sont des complexes conjugués.

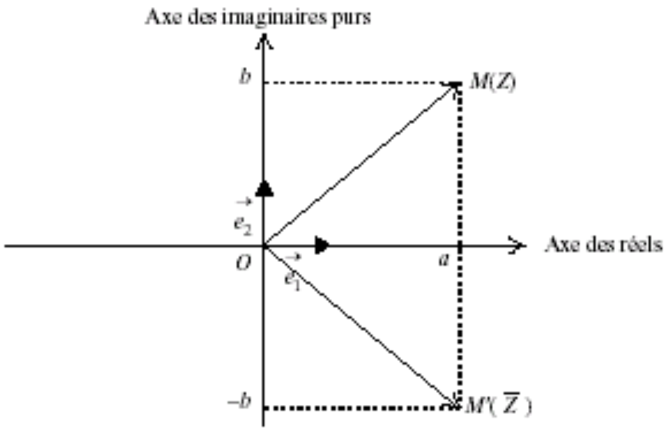
Exemples : le conjugué de $9 - 4\mathbf{i}$ est $9 + 4\mathbf{i}$. Cas particuliers : $\overline{\mathbf{i}} = \overline{0 + 1\mathbf{i}} = 0 - 1\mathbf{i} = -\mathbf{i}$; $\overline{7} = 7$.

5.2. Propriétés :

- $\mathbf{Z + \overline{Z} = 2\,Re(Z)}$ et $\mathbf{Z - \overline{Z} = 2i\,Im(Z)}$
- **Z** est réel $\Leftrightarrow \mathbf{Z = \overline{Z}}$
- **Z** est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathbf{Z = -\overline{Z}}$

5.3. Interprétation géométrique du conjugué

Les images de deux nombres complexes conjugués sont symétriques par rapport à l'axe des réels.



5.4. Théorème :

Pour tout nombre complexe $\mathbf{Z = a + bi}$, la quantité $\mathbf{Z.\overline{Z}}$ est un nombre réel

$$\mathbf{Z.\overline{Z} = a^2 + b^2}$$

Exercices : Construis dans le plan de Gauss les points dont l'affixe sont :

1) $(3 - 2i) + (1 - 3i)$
2) $(\sqrt{2} - i)^2$
3) $(\sqrt{3}i)^3$
4) $z - z'$ avec $z = 1 + i$ et $z' = 1 - i$
5) $2z + 3z'$ avec $z = 1 + i$ et $z' = 1 - i$

5.5. Théorème : *Propriétés de la conjugaison*

Pour tout nombre complexe Z et Z', on a :

$\overline{Z+Z'}=\overline{Z}+\overline{Z'}$ $\overline{-Z}=-\overline{Z}$ $\overline{Z.Z'}=\overline{Z}.\overline{Z'}$ $\overline{Z^n}=\overline{Z}^{\,n}$ $\overline{\left(\dfrac{Z}{Z'}\right)}=\dfrac{\overline{Z}}{\overline{Z'}}$ $(Z'\neq 0)$

Démonstrations :

Exemples :

- Le conjugué de $Z_1=\dfrac{4-5\mathbf{i}}{3+\mathbf{i}}$ est $\overline{Z_1}=\dfrac{4+5\mathbf{i}}{3-\mathbf{i}}$.
- Celui de $Z=\dfrac{2z^2-\mathbf{i}}{5z+1}$ est $\overline{Z}=\dfrac{\overline{2}\overline{z^2}-\overline{\mathbf{i}}}{\overline{5}\overline{z}+\overline{1}}=\dfrac{2\overline{z}^2+\mathbf{i}}{5\overline{z}+1}$.

Exercice : déterminer le lieu des points M d'affixe z telle que $\dfrac{\mathbf{i}z-1}{z-\mathbf{i}}$ soit réel.

5.5. Théorème :

Si un polynôme P à coefficients réels admet un nombre complexe Z comme racine, alors $\overline{Z}$ est aussi une racine

Démonstration ; D'après les propriétés de conjugaison, $P(\overline{Z})=\overline{P(Z)}$ et donc si $P(Z)=0$ alors $\overline{P(Z)}=0$ d'où $P(\overline{Z})=0$

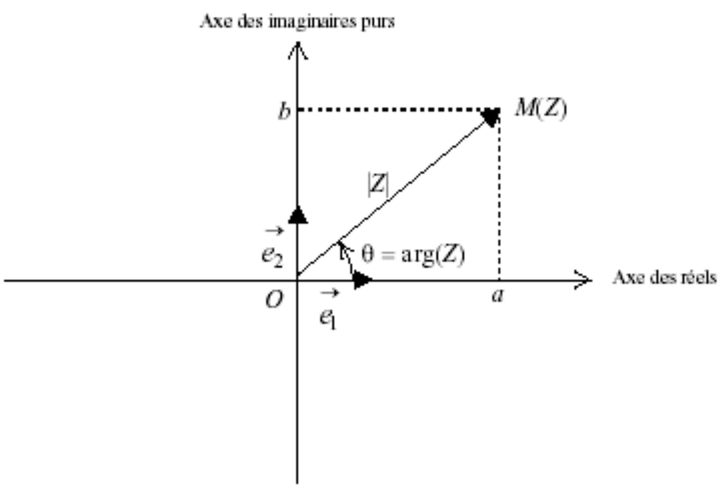
Exemple : on donne $P(x)=x^2+x+1$.

On vérifiera que les nombres complexes $\mathbf{j}=-\dfrac{1}{2}+\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\overline{\mathbf{j}}=-\dfrac{1}{2}-\mathbf{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sont tous deux des racines de P.

6. Module et argument d'un nombre complexe

Z =a + bi est déterminé par son image M et donc aussi par :

$|Z|$ la distance de O à M et par θ une mesure (en radian) de l'angle orienté $\left(\vec{e_1};\overrightarrow{OM}\right)$



6.1. Définition

On appelle module d'un nombre complexe **Z = a + bi** la quantité positive

$$|Z| = \sqrt{a^2+b^2}$$

Si Z est l'affixe d'un point M(a ;b), le module de Z est la distance de O à M

Si Z est l'affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, le module de Z représente la distance de A à B : $AB = |Z_B - Z_A|$

Exemples :

- Module de $Z = -3 + 4\mathbf{i}$: $|Z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|Z| = 5$. Module de $Z = 9\mathbf{i}$: $|Z| = 9$.
- On donne $Z_A = -1 + 3\mathbf{i}$; $Z_B = 2 - \mathbf{i}$. A est l'image de Z_A ; B est l'image de Z_B ; calculer la distance AB :

l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $Z_B - Z_A = 3 - 4\mathbf{i}$ donc $AB = |Z_B - Z_A| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$

Remarques :

- $|Z| \geq 0$ pour tout nombre complexe Z
- $|Z| = 0$ équivaut à Z=0
- $|Z| = \sqrt{Z.\overline{Z}}$ ou encore $|Z|^2 = Z.\overline{Z}$

Application :

Soient u et v deux nombres complexes distincts et de même module r. Alors $\dfrac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur.

On a :

$$\overline{\left(\frac{u+v}{u-v}\right)} = \frac{\bar{u}+\bar{v}}{\bar{u}-\bar{v}} = \frac{u\bar{u}v+uv\bar{v}}{u\bar{u}v-uv\bar{v}} = \frac{|u|^2 v+u|v|^2}{|u|^2 v-u|v|^2} = -\frac{u+v}{u-v}$$

$\dfrac{u+v}{u-v}$ est imaginaire pur

- Si **Z = a + bi** est réel (b=0) alors on a $|Z| = \sqrt{a^2} = |a|$

6.2. Définition

On appelle argument d'un nombre complexe **Z** non nul toute mesure, en radians, de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{OM}\right)$

On le note **θ = arg(Z)**

Un nombre complexe possède une infinité d'arguments. Si θ est un argument de Z, tout autre argument de Z est de la forme θ+2kπ (k∈Z). L'unique argument θ appartenant à l'intervalle]-π ; π] est l'argument principal. Attention… Le nombre complexe nul Z=0 ne possède pas d'arguments !

On notera par exemple $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ ou $\arg(Z) = \frac{\pi}{4}$ **modulo** 2π pour signifier que $\arg(Z)$ peut être égal à $\frac{\pi}{4}$ mais aussi égal à n'importe lequel des nombres $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Attention ! Le nombre complexe nul $Z = 0$ ne possède pas d'arguments car, dans ce cas, l'angle $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM}\right)$ ne se défini pas.

Exemples : $\arg(\mathbf{i}) = \frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$; $\arg(1) = 0$ $[2\pi]$; $\arg(-1) = \pi$ $[2\pi]$; $\arg(-\mathbf{i}) = -\frac{\pi}{2}$ $[2\pi]$; $\arg(1+\mathbf{i}) = \frac{\pi}{4}$ $[2\pi]$.

Méthode générale pour calculer l'argument principal d'un nombre complexe non nul

Soit **Z =a + bi**

On a immédiatement : $\boxed{|Z| = \sqrt{a^2+b^2}}$

Et, si |Z| ≠ 0 $\boxed{\cos\theta = \frac{a}{|Z|}}$ $\boxed{\sin\theta = \frac{b}{|Z|}}$ $\boxed{\text{tg}\theta = \frac{b}{a}}$ (tenir compte des signes de a et b)

Exemples :

- Argument principal θ de $Z = -2\sqrt{3} + 2\mathbf{i}$.

  On a $|Z|^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 = 16$ donc $|Z| = 4$.

  Nous devons maintenant résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{-2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

  Comme nous avons une bonne connaissance du cercle trigonométrique, nous concluons $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

- Argument principal θ de $Z = 3 - 4\mathbf{i}$.

  On a $|Z|^2 = 9 + 16 = 25$ donc $|Z| = 5$. Nous devons résoudre le système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{3}{5} \\ \sin\theta = -\dfrac{4}{5} \end{cases}$$

  Ce ne sont pas des valeurs remarquables. La calculatrice donne $|\theta| \simeq 0{,}9273$ rad. Mais sin θ est négatif, donc θ est négatif : $\theta \simeq -0{,}9273$ rad.

6.3. Théorème : *Propriétés des modules*

Pour tout nombre complexe **Z** et **Z′** :

- Module du produit :

$$|Z.Z'| = |Z|.|Z'| \text{ et en particulier, si } \lambda \text{ est réel : } |\lambda Z| = \lambda|Z|$$

- Module d'un quotient :

$$\left|\frac{Z}{Z'}\right| = \frac{|Z|}{|Z'|} \text{ (lorsque } Z'\neq 0\text{) et en particulier, pour tout } Z\neq 0,\ \left|\frac{1}{Z}\right| = \frac{1}{|Z|}$$

- Inégalité triangulaire :

$$|Z+Z'| \leq |Z| + |Z'|$$

Démonstration :

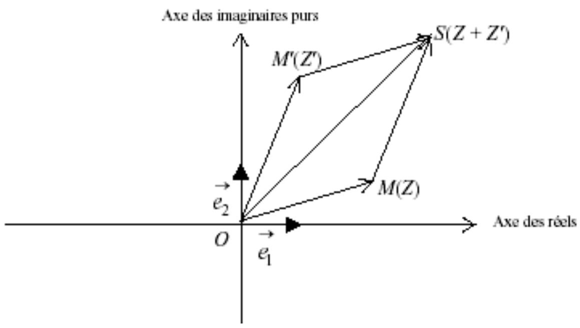
$$|Z\,Z'|^2 = Z\,Z'\,\overline{Z\,Z'} = Z\,Z'\,\overline{Z}\ \overline{Z'} = Z\,\overline{Z}\,Z'\,\overline{Z'} = |Z|^2|Z'|^2 = (|Z||Z'|)^2$$

Et comme un module est positif : $|Z\,Z'| = |Z||Z'|$

La deuxième propriété se démontre de façon analogue.

En ce qui concerne l'inégalité triangulaire :

Soient M, M' et S les images respectifs de Z, Z' et $Z+Z'$. On a $OS \leqslant OM + OM'$ donc $|Z+Z'| \leqslant |Z| + |Z'|$.



7. Différentes formes d'écritures des nombres complexes

7.1. Forme trigonométrique

L'écriture **Z =a + bi** s'appelle la forme algébrique de Z (ou encore forme cartésienne)
D'après le point précédent, si on note l'argument du nombre complexe par la lettre r, on a :

$a = r.\cos\theta \qquad b = r.\sin\theta \qquad$ avec $\quad r=|Z| \quad$ et $\quad \theta = \arg(Z)$

Le nombre complexe Z peut donc s'écrire : $\mathbf{Z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta)}$ (forme trigonométrique)

Notation abrégée (notation anglo-saxonne) : $\boxed{\mathbf{Z = r.(\cos\theta + i.\sin\theta) = r.\,cis\,\theta}}$

Exercices : Ecrire sous forme trigonométrique les complexes :

1) $z_1 = 3$	**3)** $z_3 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$	**5)** $z_5 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	**7)** $z_7 = -3 - i\sqrt{3}$
2) $z_2 = i$	**4)** $z_4 = -1 + i$	**6)** $z_6 = 1 - i\sqrt{3}$	**8)** $z_8 = 1 + i$

7.2. Théorèmes : *Propriétés des arguments*

Pour tout nombre complexe **Z** et **Z′** non nuls:

- Argument du produit :
  $\mathbf{\arg(Z.Z') = \arg(Z) + \arg(Z')}$ et en particulier, si λ est réel :
- Argument d'un quotient :
  $\mathbf{\arg\left(\dfrac{Z}{Z'}\right) = \arg(Z) - \arg(Z')}$ en particulier, $\mathbf{\arg\left(\dfrac{1}{Z}\right) = -\arg(Z)}$
- Argument d'une puissance :
  $\mathbf{\arg(Z^n) = n.\arg(Z)}$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Démonstration : utilisons des formes trigonométriques de Z et Z' :

$$Z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta) \text{ et } Z' = r'(\cos\theta' + \mathbf{i}\sin\theta')$$

Ainsi :

$$ZZ' = r\,r'(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)(\cos\theta' + \mathbf{i}\sin\theta') = r\,r'(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + \mathbf{i}(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'))$$

Ce qui, d'après les formules trigonométriques d'addition donne :

$$ZZ' = r\,r'(\cos(\theta+\theta') + \mathbf{i}\sin(\theta+\theta'))$$

Et comme $r\,r' > 0$, on en déduit

$$|ZZ'| = r\,r' \text{ et } \arg(ZZ') = \theta + \theta' = \arg(Z) + \arg(Z') \; [2\pi]$$

D'où la première relation : $\arg(ZZ') = \arg(Z) + \arg(Z')\;[2\pi]$

Pour la dernière relation, distinguons trois cas :

- $n > 0$: $\arg(Z^n) = \arg(Z \times Z \times ... \times Z) = n \arg(Z) \ [2\pi]$

  (Peut se démontrer proprement par récurrence)

- $n < 0$, alors en posant $m = -n > 0$ et en utilisant le cas précédent avec $m > 0$:

$$\arg(Z^n) = \arg\left(\frac{1}{Z^m}\right) = m \arg\left(\frac{1}{Z}\right) = -m \arg(Z) = n \arg(Z) \ [2\pi]$$

- Pour $n = 0$, la relation $\arg(Z^n) = n \arg(Z) \ [2\pi]$ est triviale.

7.3. Produit, quotient de deux nombres complexes

Considérons les nombres complexes :

$$\mathbf{Z_1 = a_1 + b_1 i = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) = r_1.cis(\theta_1)}$$
$$\mathbf{Z_2 = a_2 + b_2 i = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) = r_2.cis(\theta_2)}$$

Effectuons le produit $Z_1.Z_2$. On obtient :

$$\boxed{\mathbf{Z_1.Z_2 = r_1 r_2.cis(\theta_1 + \theta_2)}}$$

D'où on tire :

> Le produit de deux nombres complexes a
> pour module, le produit des modules de ces nombres , et
> pour argument, la somme des arguments de ces nombres.

Exemple : Soit $\mathbf{Z_1 = 3.cis\left(-\frac{\pi}{4}\right)}$ et $\mathbf{Z_2 = 2.cis\left(\frac{2\pi}{3}\right)}$ Détermine $Z_1.Z_2$

Conséquences :

- Cette règle s'étend à un produit de plusieurs nombres :

$$\mathbf{Z_1.Z_2.Z_3 = r_1 r_2 r_3[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)]}$$

- Soit $Z_1 \neq 0$ (c'est-à-dire $\rho_1 \neq 0$) :

$$\mathbf{\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{r_1}.(\cos(-\theta_1) + i\sin(-\theta_1))}$$

> L'inverse d'un nombre complexe a
> pour module, l'inverse du module de ce nombre , et
> pour argument, l'opposé de l'argument de ce nombre.

- Soit $Z_2 \neq 0$ (c'est-à-dire $r_2 \neq 0$) :

$$\mathbf{\frac{Z_1}{Z_2} = Z_1.\frac{1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}.(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2))}$$

> Le quotient de deux nombres complexes a
> pour module, le quotient des modules du dividende et du diviseur, et
> pour argument, la différence des arguments du dividende et du diviseur.

- Le produit de deux nombres complexes de module 1, a pour module 1.
- L'ensemble des nombres complexes de module 1, est un groupe commutatif pour la multiplication.

Exercices : On donne Z_1 et Z_2. Représenter ces nombres dans le plan de Gauss, déterminer leur forme trigonométrique, déterminer la forme trigonométrique de $Z_1.Z_2$, représenter le produit dans le plan de Gauss, déterminer la forme trigonométrique de Z_1/Z_2.

1) $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$; $z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

3) $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{i}{3}$; $z_2 = i$

2) $z_1 = -2 - +2i$; $z_2 = \sqrt{3} + i$

4) $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $z_2 = -1 - i$

7.4. Forme exponentielle

Définition :

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i.\sin\theta$

$e^{i\theta}$ désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument θ

Exemples : $e^{i0} = 1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i\pi} = -1$; $e^{2i\pi} = 1$; $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Un nombre complexe de module r et d'argument θ s'écrit alors $Z = r.e^{i\theta}$. Cette écriture est appelée forme exponentielle de Z.

7.5. Théorème : pour tout θ et θ' réels

$$e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} \qquad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')} \qquad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \text{ pour tout } n \in \mathbb{Z}$$

Cette notation rend les calculs très simples :

Si $Z = 3\,e^{i\frac{3\pi}{4}}$ et $Z' = 7\,e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ alors $ZZ' = 21\,e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $\frac{Z}{Z'} = \frac{3}{7}\,e^{i\frac{17\pi}{12}}$

Exercices :

1) Déterminer la forme algébrique du nombre $Z = \frac{(1+i)^4}{(\sqrt{3} - i)^3}$.

Posons $Z_1 = 1 + i$ et $Z_2 = \sqrt{3} - i$.

Déterminons les formes exponentielles de Z_1 et Z_2 :

Comme $|Z_1| = \sqrt{2}$ et $\arg(Z_1) = \frac{\pi}{4}$ [2π], on a :

$$Z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$$

D'où :

$$Z_1^4 = 4\,e^{i\pi} = -4$$

En remarquant que $(1+i)^2 = 2i$, le résultat $(1+i)^4 = -4$ est immédiat.

Comme $|Z_2| = 2$ et $\arg(Z_2) = -\frac{\pi}{6}$ [2π], on a :

$$Z_2 = 2\,e^{-i\frac{\pi}{6}}$$

D'où :

$$Z_2^3 = 8\,e^{-i\frac{\pi}{2}} = -8i$$

Et finalement :

$$Z = \frac{Z_1^4}{Z_2^3} = -\frac{1}{2}i$$

2) Calculer $(1+\mathbf{i})^{14}$.

Posons $Z = 1 + \mathbf{i}$. On a : $Z = \sqrt{2}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{4}}$

D'où : $Z^{14} = 2^8\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{7\pi}{2}} = 128\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}2\pi}\ \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{3\pi}{2}} = -128\ \mathbf{i}$

8. Formules de Moivre. Formules d'Euler

8.1. Théorème

Formules de Moivre : pour tout θ réel et tout $n \in Z$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$

Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Exemple : $(\text{cis } 25°)^3 = \text{cis } 75°$

Démonstration :
D'après les formes exponentielles :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$ d'ou la première formule

La seconde est obtenue en remplaçant θ par -θ

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos-\theta + i\sin-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta + \cos\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$$
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos-\theta + i\sin-\theta) = \cos\theta + i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = 2i\sin\theta$$

Applications :

1) Déterminer cos 2θ et sin 2θ en fonction de cos θ et sin θ
2) Déterminer cos 3θ et sin 3θ en fonction de cos θ et sin θ
3) Démontre que : $x^2 - 2x\cos\theta + 1 = \left(x - e^{i\theta}\right)\left(x - e^{-i\theta}\right)$
4) On pose $S = \cos p + \cos q$ et $S' = \sin p + \sin q$. Démontrer que $S + \mathbf{i}S' = 2\,\mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{p+q}{2}} \cos\dfrac{p-q}{2}$. En déduire des expressions de S et S' sous forme de produits. Procéder de même avec $T = \cos p - \cos q$ et $T' = \sin p - \sin q$.

5)Calcule et écris sous la forme algébrique :

1) $\text{cis}45°.\text{cis}30°$

2) $\left(2\text{cis}\dfrac{\pi}{3}\right)^2.\left(3\text{cis}\dfrac{\pi}{4}\right)^3$

3) $(-3-3i)^7$

4) $\dfrac{12\text{cis}60°}{4\text{cis}15°}$

5) $\dfrac{(2-2i)^5}{\left(-\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^4}$

6) $\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5.(2-2i)^6$

9. Liens entre les nombres complexes et certaines transformations du plan

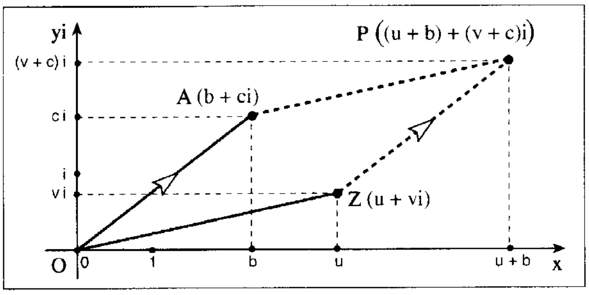
9.1 Ajouter un complexe quelconque à un complexe donné

Soit dans le plan de Gauss rapporté à un repère d'origine O

$z = u + vi$ un complexe quelconque d'affixe Z

$a = b + ci$ un complexe quelconque d'affixe A

Considérons le point P, d'affixe z+a



L'application de C dans C : z→ z + a (ajouter à un complexe quelconque z un complexe donné a) correspond, dans le plan de Gauss, à une translation de vecteur d'affixe a

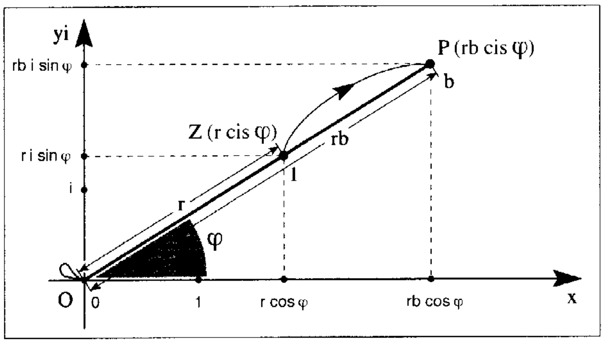
9.2 Multiplier un complexe quelconque par un réel donné

Soit dans le plan de Gauss rapporté à un repère d'origine O

$z = r\,\text{cis}\varphi$ un complexe quelconque d'affixe Z

b un réel quelconque

Considérons le point P, d'affixe zb



Le point P, d'affixe zb, a pour module rb et pour argument φ

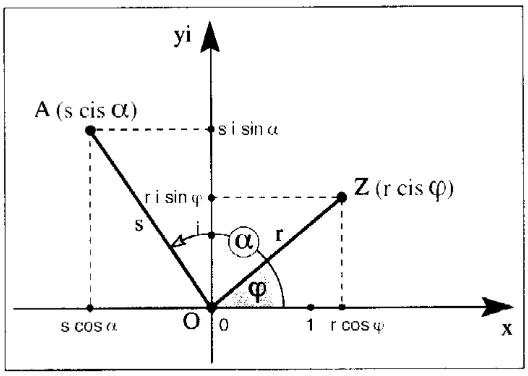
L'application de C dans C : z→ zb (multiplier à un complexe quelconque z un réel donné b) correspond, dans le plan de Gauss, à une homothétie de centre O et de rapport b

9.3 Multiplier un complexe quelconque par un complexe donné

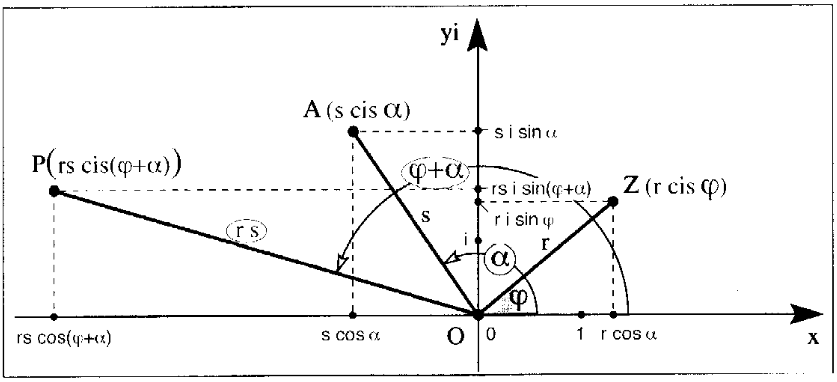
Soit dans le plan de Gauss rapporté à un repère d'origine O

$z = r\,\text{cis}\varphi$ un complexe quelconque d'affixe Z

$z' = s\,\text{cis}\alpha$ un complexe quelconque d'affixe Z'



Considérons le point P, d'affixe $zz'=rs\ cis(\varphi+\alpha)$



L'application de C dans C : $z\rightarrow zz'$ (multiplier un complexe quelconque z un complexe donné z') correspond, dans le plan de Gauss,
à **une rotation** de centre O et d'amplitude égal à l'argument de z'
suivie **d'une homothétie** de centre O et de rapport égal au module de z'

Remarques :

- dans le plan, la composée d'une rotation de centre O et d'une homothétie de centre O et de rapport s non nul, est une similitude de rapport s.
- En utilisant la forme matricielle des nombres complexes, on retrouve ce résultat

Considérons $\mathbf{z' = z_1.z_2}$ avec $\mathbf{z_1 = a + bi}$ et $\mathbf{z_2 = x + yi}$.

On a donc $\mathbf{z' = x' + y'i = (a + bi).(x + yi)}$

Ce qui donne, le système suivant : $\begin{cases} x' = ax - by \\ y' = bx + ay \end{cases}$

On peut représenter ce système sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ peut être décomposée en une composition de deux autres matrices :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{a^2+b^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2+b^2} \end{pmatrix}$ est celle d'une homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{a^2+b^2}$

La matrice $\begin{pmatrix} \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ est celle d'une rotation de centre O et d'angle θ

La matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ est donc la matrice de la composée d'une homothétie et d'une rotation, c'est-à-dire une similitude.

Exercices :

1. A quelle transformation du plan de Gauss correspond :
   a) l'addition de i à tout complexe z ?
   b) la multiplication par i de tout complexe z ?
2. Quelle est l'affixe du point P' du plan de Gauss, d'origine O, image du point P d'affixe $-1-i$
   a) par la translation de vecteur d'affixe i ?
   b) par l'homothétie h de centre O et de rapport –2 ?
   c) par la rotation de centre O et d'angle –90° ?
   d) par la similitude $h \circ r$?
3. Dans le plan de Gauss, représente le point P d'affixe $z = 1+i$ et le point Q d'affixe $t = 1-i$

Construis géométriquement le point S d'affixe :

a) z+t b) 4z-5t c) zt d) (z+t).(-2t+1) e) (2z-t)²

Décris chaque fois les transformations du plan utilisées.

4. Quel est l'affixe du point P' du plan de Gauss d'origine O, image du point P d'affixe $z = 1+i$ par
   a) la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $1-i$ suivie de la rotation d'origine O et d'angle 135° ?
   b) la rotation d'origine O et d'angle –90° suivie de l'homothétie de centre O et de rapport –3 ?

5. Dans le plan de Gauss, représente le point P d'affixe $z = -2-i$ et le point Q d'affixe $t = 2i$.

Construis géométriquement le point S d'affixe :

a) $z-t$ b) $-\dfrac{3z}{2}$ c) zt

Calcule, dans chaque cas, l'affixe du point S. Décris chaque fois les transformations du plan utilisées.

10. Racines n° d'un nombre complexe

10.1. Définition

x est une racine n° du complexe z $\Leftrightarrow$ $x^n = z$

10.2. Propriété

Tout nombre complexe $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ admet n racines distinctes données par :

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \qquad k \in \{0,1,2,...,n-1\}$$

Démonstration

Nous cherchons les racines énièmes de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

c'est-à-dire les nombres dont la n° puissance égale z.

Soit $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$ un de ces nombres.

On a : $z'^n = z$ d'où $r'^n = r$ donc $r' = \sqrt[n]{r}$

Et : $n.\theta' = \theta + 2k\pi$ donc $\theta' = \dfrac{\theta+2k\pi}{n}$ (avec $k \in$ Z)

10.3. Propriété

Les n racines n° du nombre complexe $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sont égales au produit de l'unes d'elles par les n racines n° de 1

Démonstration

Puisque $1 = \text{cis } 0$, les n racines n° de 1 sont $\text{cis}\left(\dfrac{2k\pi}{n}\right)$

D'autre part, les n racines n° de $r \text{ cis}\theta$ peuvent s'écrire :

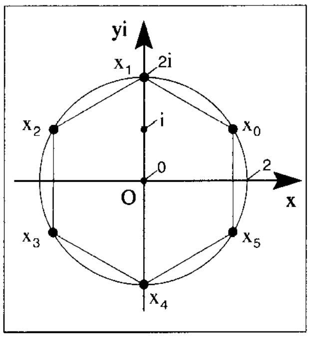
$$z_k = \sqrt[n]{r}\text{ cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\text{ cis}\left(\frac{\theta}{n}\right).\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right) = z_0.\text{cis}\left(\frac{2k\pi}{n}\right)$$

10.4. Propriété

Les racines n° du nombre complexe $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ sont, dans le plan de Gauss, les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit au cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et de centre O

Démonstration

Chaque image appartient bien au cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{r}$, puisque le module de chacune des racines est $\sqrt[n]{r}$.
Chaque image est le sommet d'un polygone régulier inscrit à ce cercle, puisque l'angle au centre déterminé par deux racines successives est $\frac{2\pi}{n}$.



EXEMPLE

Rechercher les racines sixièmes de -64.

1) $-64 = 64 \operatorname{cis} \pi$.

2) $\sqrt[6]{64} = 2$.

3) $z_0 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} + i$ $\qquad z_3 = 2\operatorname{cis}\frac{7\pi}{6} = -\sqrt{3} - i$

$z_1 = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2} = 2i$ $\qquad z_4 = 2\operatorname{cis}\frac{3\pi}{6} = -2i$

$z_2 = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3} + i$ $\qquad z_5 = 2\operatorname{cis}\frac{11\pi}{6} = \sqrt{3} - 1.$

Exercices :

1. Calcule les racines sixièmes de l'unité et porte dans le plan de Gauss, les points dont les affixes sont les racines trouvées.
2. Calcule les racines cinquièmes de $32i$
3. Calcule les racines cubiques de $\sqrt{3} + 3i$
4. Démontre : $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}}.\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$
5. Factorise dans C les expressions suivantes :

$$a)\ x^2 + x + 1 \qquad b)\ x^4 + 6x^2 + 5 \qquad c)\ x^6 + x^4 + x^2 + 1$$

6. Résous dans C les équations suivantes et écris les solutions sous forme algébrique :

$$a)\ x^4 + 8\sqrt{2} = 8i\sqrt{2} \qquad b)\ z^6 - z^3 + 1 = 0$$

7. Vrai ou faux ? Si l'énoncé est correct, justifie-le, sinon corrige-le !

1) $-3 + i$ est le complexe conjugué de $-3 - i$.
2) Un complexe est nul ssi sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.
3) Si z est un nombre complexe, alors
   a) z est un réel ssi $z = \bar{z}$;
   b) $z + \bar{z} = 2\mathcal{R}(z)$;
   c) $z - \bar{z} = 2\mathcal{I}(\bar{z})$;
   d) le module de z égale 1 ssi $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
4) Si a et b sont des réels, alors $\frac{1}{a+bi} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}i$.
5) Le carré du module de tout complexe est égal au produit de ce complexe par son conjugué.
6) Les racines carrées de -4 sont $2i$ et $-2i$.
7) L'inverse de i est $-i$.
8) Deux nombres complexes sont conjugués ssi leur somme et leur produit sont des réels.
9) $7 + 5i > 2 - 3i$.

Conclusions :

- Tout nombre complexe a n racines énièmes complexes.
- Les points-images de ces racines énièmes sont les n sommets d'un n-gone régulier inscrit dans le cercle de rayon $\sqrt[n]{r}$ et de centre O.
- Les n racines énièmes de 1 sont :

$$\boxed{\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}} \text{ où k=0, 1, 2, 3, …, n-1}$$

Les points-images des n racines énièmes de 1 sont les sommets du n-gone régulier dont un sommet est le point-image de 1 (et inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1)

Application : Construire les racines 3°, 4°, 6° de l'unité.

Application aux équations binômes :

On appelle équation binôme, une équation de la forme : $x^n = A$ où $A \in \mathbb{C}$.
Les racines de cette équation sont les n racines énièmes de A.
Si on pose $A = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, les racines de l'équation sont :

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \text{ ou encore :}$$

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}\right).\left(\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}\right) \text{où k=0, 1, 2, 3, …, n-1}$$

Les racines de l'équation $x^n = A$ s'obtiennent en multipliant une quelconque de ces racines énièmes par les n racines énièmes de l'unité. En particulier, si A est réel positif, il suffit de multiplier $\sqrt[n]{A}$ par les n racines énièmes de l'unité.

11. Propriétés du corps des nombres complexes

- Théorème de d'Alembert : Tout polynôme en x du énième degré, à coefficients complexes, a n racines complexes distinctes ou non. Il peut se factoriser en n facteurs du premier degré en x.

Exemple de factorisation :
$$x^3-1=(x-1).\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right).\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$$

- Si un polynôme P(x), à coefficients réels, a pour racine **a+bi**, alors il a aussi pour racine **a-bi**

- Toute équation du énième degré, à coefficients réels, a n racines complexes distinctes ou non ; ces racines sont réelles ou complexes conjuguées deux à deux.