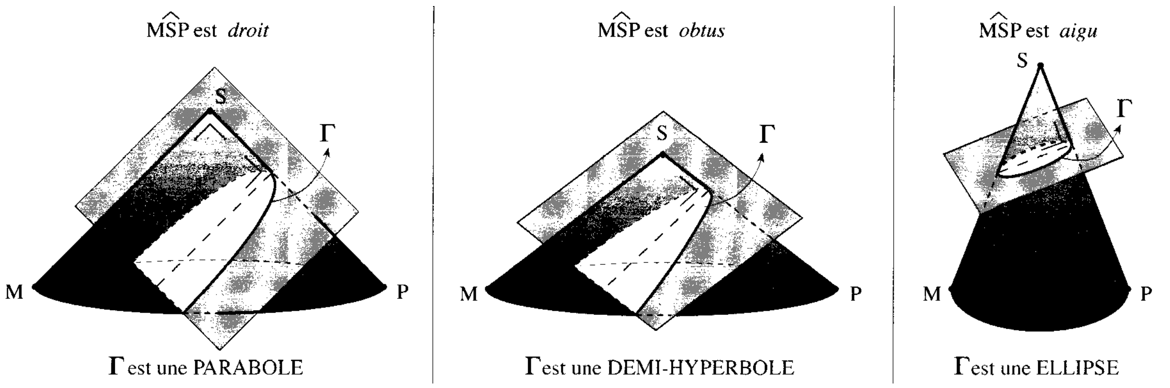
GÉOMÉTRIE PLANE LES CONIQUES

Petite introduction historique

- Dans la Grèce ancienne, l'oracle de Délos posa le problème de la duplication du cube (construire un cube de volume double de celui d'un cube donné) ce qui est impossible à la règle et au compas. L'astronome et mathématicien Ménechme (vers 375-325 av. J.-C.) trouva la solution en inventant des courbes qui sont l'intersection d'un cône droit de révolution par un plan perpendiculaire à une génératrice.

Suivant l'angle au sommet du cône, il obtint trois sortes de sections coniques : la parabole, la (demi-)hyperbole et l'ellipse. On leur donna le nom générique de coniques.



Pour construire un cube de côté x et de volume égal au double d'un cube de côté k connu, il chercha l'intersection d'une hyperbole d'équation $y = \frac{k^2}{x}$ et de la parabole d'équation $y^2 = \frac{1}{2}kx$. En résolvant ce système, il trouva $x^3 = 2k^3$ ce qui lui permit d'effectuer la construction demandée sans pour autant connaître les nombres irrationnels tels que $\sqrt[3]{2}$ ni d'ailleurs les équations des coniques.

- Apollonius de Perge (262 av. J.-C. - 190 av. J.-C.**),** mathématicien et astronome grec, appelé le «Grand géomètre», s'illustra par les huit volumes de son œuvre «Les sections coniques».

Pour générer toutes les **coniques,** il eut l'idée de ne considérer qu'un seul cône circulaire droit ou un cône à double nappe. La nature de la section conique obtenue dépend alors de la direction du plan de section. C'est lui aussi qui tut probablement le premier à baptiser les trois sortes de coniques: la parabole, l'hyperbole, l'ellipse (et le cercle)
Il est amusant de constater que l'on retrouve comme figures de style de la langue française, ces trois mots avec une signification assez différente mais une étymologie analogue que l'on comprendra mieux après avoir donné les définitions de ces coniques :

parabole (du grec παραβολη comparaison, action d'égaler):
comparaison imagée utilisée dans un récit ou un enseignement afin de mieux faire comprendre le message (comme par exemple, les paraboles des Evangiles);

hyperbole (du grec υπερβολ_ ,excès) :
procédé linguistique qui consiste à mettre en relief une expression en employant des mots qui dépassent la pensée (ainsi, on parlera d'un géant pour un homme de haute taille);

ellipse (du grec ελλειψιζ, manque):
suppression d'un ou de plusieurs mots dans une phrase qui ne sont pas indispensables à la compréhension de cette dernière (ainsi dans le vers de Racine : « Je t'aimais inconstant, qu'aurais-je fait, fidèle? » au lieu de « qu'aurais je fait, si tu avais été fidèle?).

1er cas.

Le plan sécant α est parallèle à une génératrice du cône.

Il coupe le cône suivant

- une parabole (Fig. 1)

  ou

- une droite (Fig. 2).

Fig. 1

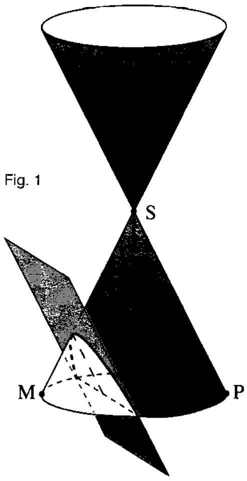
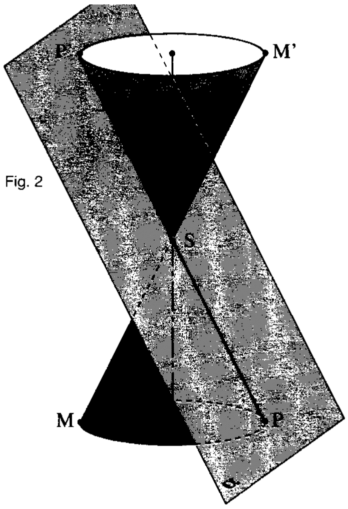


Fig. 2



2^e cas.

Le plan sécant α coupe les deux nappes du cône.

Il coupe le cône suivant

- une hyperbole (Fig. 1)

  ou

- deux droites sécantes (Fig. 2).

Fig. 1

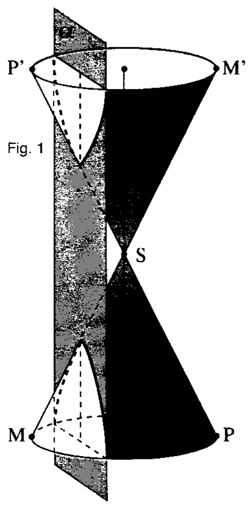
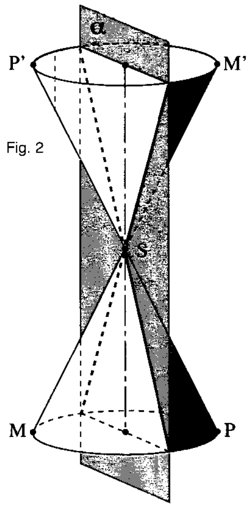


Fig. 2



3^e cas.

Le plan sécant α coupe une seule nappe du cône.

Il coupe le cône suivant

- un cercle, si α est parallèle à la base (Fig. 1)

  ou

- une ellipse, si α n'est pas parallèle à la base (Fig. 2)

  ou

- le point S, sommet du cône (Fig. 3).

Fig. 1

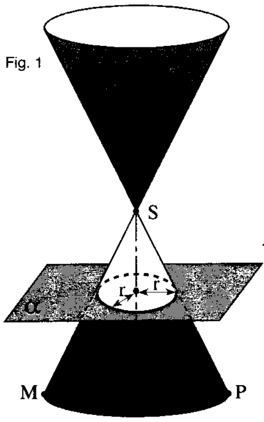


Fig. 2

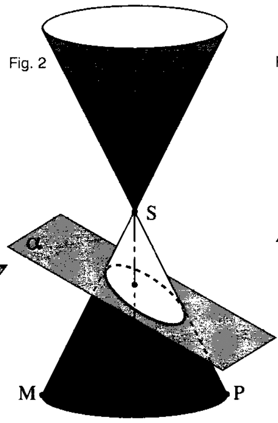
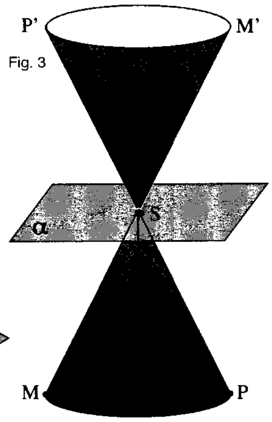


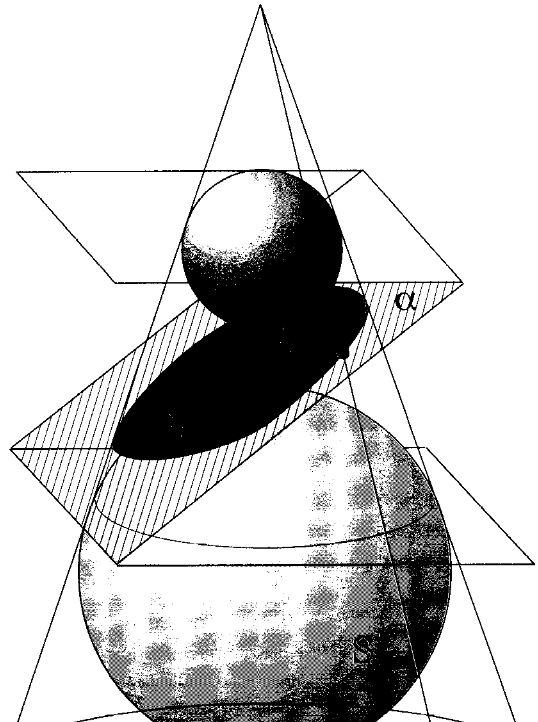
Fig. 3



- Célèbre tant par sa science et son éloquence que par sa beauté, la première mathématicienne de l'histoire était grecque. Au 4° siècle de notre ère, à Alexandrie (Egypte), Hypatie enseigna les oeuvres de Platon et d'Aristote. Elle publia une œuvre critique des « Eléments »d'Euclide. Elle fit – croit – on - des commentaires éclairés sur les «Sections coniques» d' Apollonius de Perge et les «Tables» du géographe Ptolémée (2e siècle). L'évêque Cyrille d'Alexandrie crut qu'elle constituait, par sa pensée très libre, un handicap pour l'évolution du christianisme. Elle fut massacrée par la populace excitée par des moines.

- Plus proches de nous, de nombreux scientifiques s'intéressèrent aux **coniques** et à leurs applications:
  - l'astronome allemand Johannes Kepler (1571-1630) qui dut certainement se réjouir en découvrant que les planètes parcouraient des trajectoires dont les courbes étaient connues depuis l'antiquité;
  - le français René Descartes qui, le premier, eut l'idée de situer, dans un repère du plan, les points par un couple de nombres, les droites et les courbes par des équations;
  - l'ingénieur français Gérard Desargues (1593-1662) qui fut un précurseur pour nombre de questions de **géométrie moderne;**
  - un autre polytechnicien militaire, le français Jean-Victor Poncelet, créateur avec son compatriote Michel Chasies de la **géométrie projective.** Il introduisit le principe de dualité en intervertissant dans les énoncés les mots point et droite. Un théorème sur les coniques porte le nom du premier.
  - l'allemand Juhus Plûcker (1801-1868), spécialiste **de géométrie algébrique;**
  - le belge Adolphe Quételet, fondateur de l'observatoire d'Uccle à Bruxelles, statisticien réputé et l'ingénieur français naturalisé belge Germinal Dandelin, professeur à l'École des Mines de la faculté polytechniques de l'université de Liège. Ils laissèrent leur nom à un théorème connu à l'étranger sous le nom de «théorème belge».

une section plane dans un cône est une **conique** dont les foyers F et F' sont les points de contact avec le plan α de section des sphères $\mathbb{S}$ et $\mathbb{S}'$.



Chapitre 1: Lieux géométriques

1. Définition

Un lieu géométrique est un ensemble de points qui possèdent tous une même propriété et qu'eux seuls possèdent.

Exemples

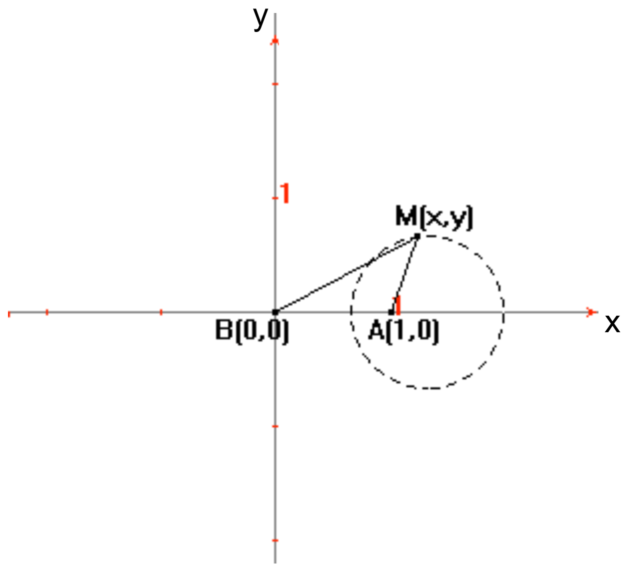
- Le lieu des points équidistants de deux points donnés distincts *A* et *B* est la médiatrice du segment $[AB]$.
- Le lieu géométrique des points situés à la distance *r* d'un point fixe *C* est le cercle de centre *C* et de rayon *r*.
- Le lieu géométrique des points de même pression atmosphérique est une courbe appelée isobare.
- Une courbe de niveau est le lieu géométrique des points situés à une même altitude donnée.

Certaines propriétés conduisent, par leur simple traduction analytique, à ce que l'on appelle l'équation du lieu. C'est la méthode de traduction. En voici quelques exemples.

2. Exemple

On donne deux points fixes *A* et *B*. Rechercher le lieu géométrique des points qui sont deux fois plus éloignés de *B* que de *A*.

Le choix du repère et des coordonnées est important pour faciliter les calculs.
Choisissons l'origine du repère en *B*, le point unitaire de l'axe des *x* en *A* et l'axe des *y* perpendiculaire en *B* à l'axe des *x*. On a donc $B(0,0)$ et $A(1,0)$. Le repère choisi est orthonormé.



Soit $M(x,y)$ un point du lieu. Par hypothèse, on a :

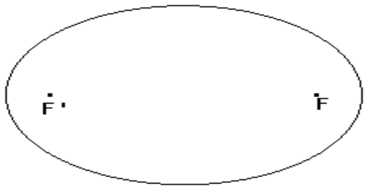
$$d(M,B) = 2.d(M,A)$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2+y^2}$$
$$x^2+y^2 = 4\left((x-1)^2+y^2\right)$$
$$x^2+y^2 = 4x^2-8x+4+4y^2$$
$$3x^2+3y^2-8x+4=0$$
$$x^2-\frac{8}{3}x+y^2=-\frac{4}{3}$$
$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{16}{9}+y^2=-\frac{4}{3}$$
$$\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\frac{4}{9} \qquad \left(x-\frac{4}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Le lieu cherché est le cercle de centre $\left(\frac{4}{3},0\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.

Chapitre 2: Ellipse

1. Définition

L'<u>ellipse</u> est le lieu géométrique des points dont la somme des distances à deux points fixes *F* et *F'*, appelés foyers, est une constante $2a$ $(a>0)$.

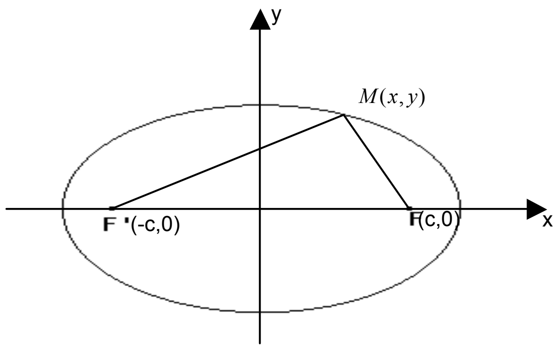


- Condition d'existence : $|FF'|<2a$.
- La droite passant par les foyers est appelée **grand axe** ou **axe focal**.
- La médiatrice de $[FF']$ est appelée **petit axe** ou **axe non focal**.
- Ces droites sont les **axes de symétrie** de l'ellipse.
- Le point commun de ces axes est le **centre de symétrie** de l'ellipse.
- Les points communs à une ellipse et à ses axes sont les **sommets** de l'ellipse, ils sont au nombre de 4.

2. Équation réduite

Soit $M\ (x,y)$ un point du lieu. On a :

$$d(M,F')+d(M,F)=2a$$



Choix du repère (orthonormé) :
Origine des axes : centre de l'ellipse.
Axe *Ox* : grand axe.
Axe *Oy* : petit axe.
Coordonnées des foyers : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$

Par définition, on a successivement :

$$d(M,F')+d(M,F)=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2+(x-c)^2+y^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$x^2+2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2+2cx-c^2-y^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$4cx-4a^2=-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2$$

$$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$$
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

or $2a > 2c$ (en vertu de l'inégalité triangulaire appliquée au triangle *FMF*')
donc $a^2 - c^2 > 0$.
Si l'on pose $a^2 - c^2 = b^2$ (avec *b* strictement positif), on obtient :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

C'est l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes ou équation réduite de l'ellipse.

Cas particulier

Si $a = b$, cette équation devient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ou

$$x^2 + y^2 = a^2$$

Il s'agit du cercle centré à l'origine et de rayon *a*.

Les coordonnées des <u>sommets</u> de l'ellipse sont :

- Intersection avec l'axe *Ox*
  En remplaçant *y* par 0 dans l'équation de l'ellipse, on trouve deux valeurs pour *x* : *a* et -*a*.
  les coordonnées des sommets de l'ellipse situés sur l'axe des *x* sont donc:

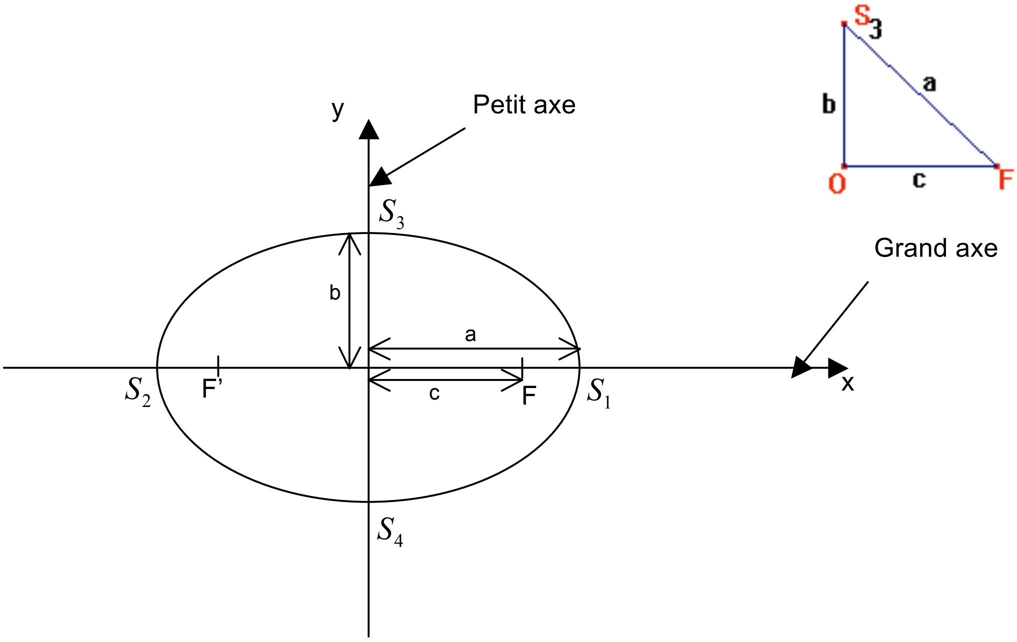
$$S_1(-a,0) \text{ et } S_2(a,0)$$

- Intersection avec l'axe *Oy*
  En remplaçant *x* par 0 dans l'équation de l'ellipse, on trouve deux valeurs pour *y* : *b* et -*b*.
  les coordonnées des sommets de l'ellipse situés sur l'axe des *y* sont donc:

$$S_3\,(0,b) \quad \text{et} \quad S_4\,(0,-b)$$

<u>Foyers</u> : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ avec, comme dit précédemment, $\boxed{c^2 = a^2 - b^2}$

Distance focale : $|FF'| = 2c$



Remarque

Si *Oy* est le grand axe focal, l'équation de l'ellipse s'écrit : $\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$; les sommets ont pour coordonnées (0, ± *a*) et (± *b,* 0), les foyers (0, ± *c*).

3. Étude de la fonction $f : x \to y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

1. La fonction est partout définie et continue dans l'intervalle $[-a, a]$.

2. <u>Parité</u>

$$f(-x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (-x)^2} = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = f(x)$$

Cette fonction est donc paire et l'étude pourrait se faire uniquement dans l'intervalle $[0, a]$, l'axe Oy étant un axe de symétrie.

3. <u>Étude de *y*</u>
   Zéros : $-a$, a
   Signe : $y > 0$

x	$-a$		a
y	0	+	0

4. <u>Étude de *y'*</u>
   $$y' = \frac{-bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$$
   Zéros : 0
   Signe :

x	$-a$		0		a
y'	/	+	0	-	/

5. Étude de *y''*

$$y'' = \frac{-ab}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)^3}}$$

Zéros : néant
Signe : $y'' < 0$

x	$-a$		a
y''	/	-	/

6. Asymptotes

Il est évident qu'il n'y a pas d'asymptote verticale. De plus, la fonction n'étant définie que dans un intervalle borné, il n'y a pas d'asymptote horizontale, ni d'asymptote oblique.

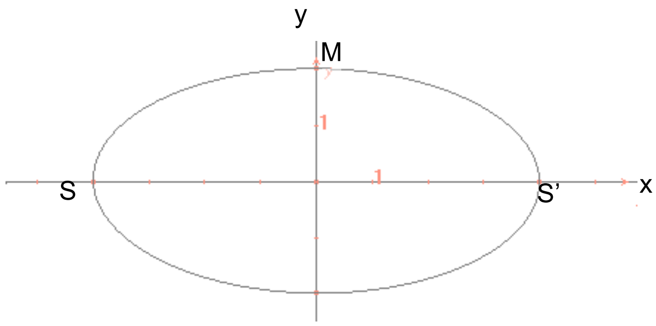
7. Points supplémentaires : (dans le cas où $a = 4$ et $b = 2$)

x	- 4	- 3	- 2	- 1	0	1	2	3	4
y	0	1,32	1,73	1,94	2	1,94	1,73	1,32	0

8. Tableau récapitulatif

x	*- a*		0		*a*
y'	/	+	0	-	/
y''	/	-	-	-	/
y	0	↗	b	↘	0
	S		*M*		*S'*

9. Graphique (dans le cas où $a = 4$ et $b = 2$)



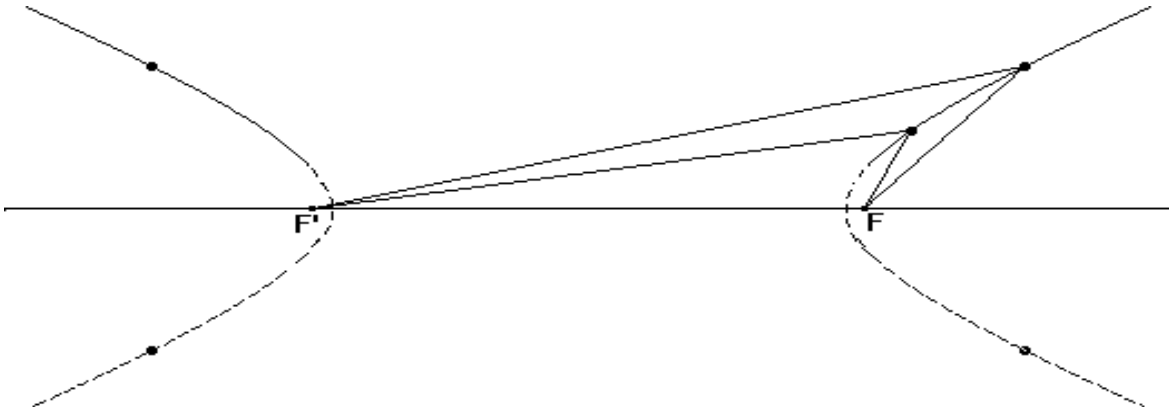
Remarque

La partie de l'ellipse en dessous de l'axe des *x* correspond au graphique de la fonction $f : x \to y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ et complète le graphique de $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Chapitre 3: Hyperbole

1. Définition

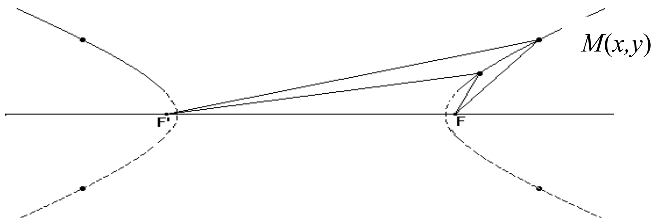
L'hyperbole est le lieu géométrique des points dont la différence des distances à deux points fixes *F* et *F'*, appelés foyers, est, en valeur absolue, une constante $2a$ $(a > 0)$.



- Condition d'existence : $|FF'| > 2a$ (un côté d'un triangle est plus grand que la différence des deux autres).
- La droite passant par les foyers (**axe focal**) et la médiatrice du segment déterminé par les foyers sont les **axes de symétrie** de l'hyperbole.
- Le point commun de ces axes est le **centre de symétrie** de l'hyperbole.
- Les points communs à l'hyperbole et à l'axe focal sont les **sommets** qui sont au nombre de deux.

2. Équation réduite

Choix du repère (orthonormé) :



Origine des axes : le centre de symétrie.
Axe *Ox* : axe focal *FF'*
Axe *Oy* : médiatrice de $[FF']$

Coordonnées des foyers : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$

Soit $M\ (x,y)$ un point du lieu. Par définition, on a successivement :

$$|\ d(M,F') - d(M,F)\ | = 2a$$

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - 4a^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$4cx - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2\left((x-c)^2 + y^2\right)$$

$$c^2x^2 + a^4 - 2a^2cx = a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$c^2x^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

or $2a < 2c$ (en vertu de l'inégalité triangulaire appliquée au triangle *FMF'*)
donc $c^2 - a^2 > 0$.
Si l'on pose $c^2 - a^2 = b^2$ (avec *b* strictement positif), on obtient :

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

ou

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

qui est l'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes ou équation réduite de l'hyperbole.

Cas particulier

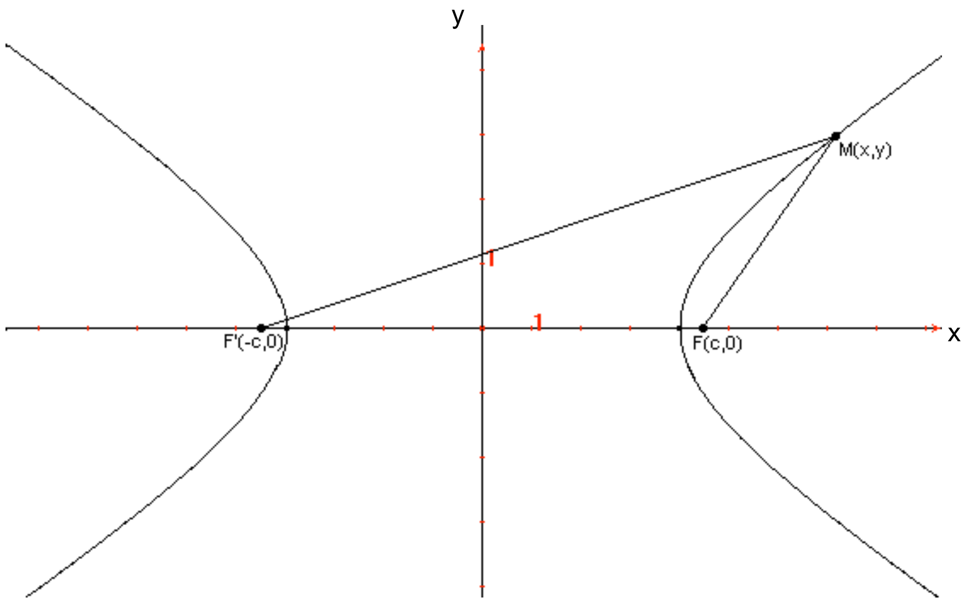
Si $a = b$, cette équation devient :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

ou

$$x^2 - y^2 = a^2$$

Cette hyperbole porte le nom d'**hyperbole équilatère**.



Les <u>sommets</u> de l'hyperbole sont :

- ♦ Intersection avec l'axe *Ox*
  En remplaçant *y* par 0 dans l'équation de l'hyperbole, on trouve deux valeurs pour *x* : *a* et -*a*. les coordonnées des sommets de l'hyperbole situés sur l'axe des *x* sont donc:

$$S_1(-a,0) \text{ et } S_2(a,0)$$

- ♦ Intersection avec l'axe *Oy*
  En remplaçant *x* par 0 dans l'équation de l'hyperbole, on ne trouve aucune valeur pour *y* : il n'y a donc pas de sommet sur l'axe *Oy*.

<u>Foyers</u> : $F(c,0)$ et $F'(-c,0)$ avec, comme dit précédemment, $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$
Distance focale : $|FF'| = 2c$

3. Étude de la fonction $f : x \to y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

1. La fonction est partout définie et continue dans l'intervalle $]-\infty,-a] \cup [a,+\infty[$

2. <u>Parité</u>

$$f(-x) = \frac{b}{a}\sqrt{(-x)^2 - a^2} = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = f(x)$$

Cette fonction est donc paire et l'étude pourrait se faire uniquement dans l'intervalle $[0,a]$, l'axe Oy étant un axe de symétrie.

3. <u>Étude de *y*</u>
   Zéros : $-a, a$
   Signe : $y > 0$

x		$-a$		a	
y	+	0		0	+

4. <u>Étude de *y'*</u>
   $y' = \frac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}}$
   Zéros : néant
   Signe :

x		$-a$		a	
y'	-	/		/	+

5. <u>Étude de *y"*</u>
   $y'' = \frac{-ab}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$
   Zéros : néant
   Signe : $y'' < 0$

x		$-a$		a	
y''	-	/		/	-

6. <u>Asymptotes</u>

A.V. : Il est évident qu'il n'y a pas d'asymptote verticale.

A.H. : $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} = +\infty$ pas d'A.H.

A.O. : $m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{b}{ax}\sqrt{x^2-a^2} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{b|x|}{ax}$

♦ $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{bx}{ax} = \frac{b}{a}$

$$p = \lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{b}{a}x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2-a^2}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{b}{a}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to+\infty}\frac{-a^2}{2x} = 0$$

La fonction possède une asymptote oblique à droite d'équation $\boxed{y = \frac{b}{a}x}$

♦ $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-bx}{ax} = -\frac{b}{a}$

$$p = \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{b}{a}x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\left[\sqrt{x^2-a^2}+x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{b}{a}\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}-x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}-x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to-\infty}\frac{-a^2}{-2x} = 0$$

La fonction possède une asymptote oblique à gauche d'équation $\boxed{y = -\frac{b}{a}x}$

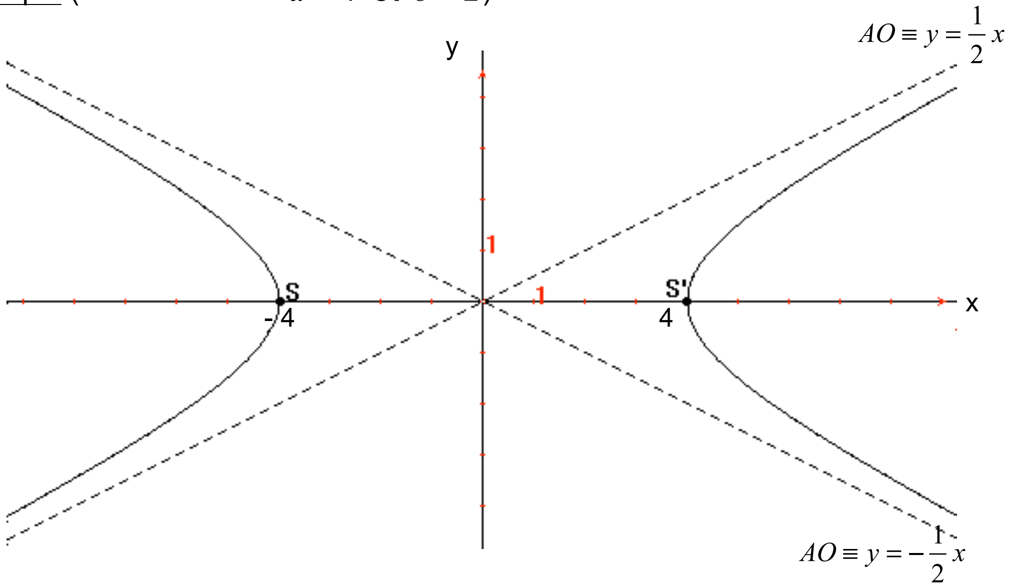
7. <u>Points supplémentaires</u> (dans le cas où $a = 4$ et $b = 2$)

x	- 8	- 7	- 6	- 5	- 4	4	5	6	7	8
y	3,46	2,87	2,24	1,5	0	0	1,5	2,24	2,87	3,46

8. <u>Tableau récapitulatif</u>

x		*- a*		*a*	
y'	-	/		/	+
y''	-	/		/	-
y	↘				↗
		S		*S'*	

9. <u>Graphique</u> (dans le cas où $a = 4$ et $b = 2$)



Remarque

La partie de l'hyperbole en dessous de l'axe *Ox* correspond au graphique de la fonction $f : x \to y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, et complète le graphique de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Chapitre 4: Parabole

1. Définition

La <u>parabole</u> est le lieu géométrique des points dont les distances à une droite fixe *d*, appelée directrice, et à un point fixe *F*, appelé foyer, sont égales.

- La droite passant par le foyer et perpendiculaire à la directrice est l'<u>axe de</u> <u>symétrie</u> de la parabole.
- Le point commun à l'axe et à la parabole est le <u>sommet</u> de cette parabole, il se trouve à égale distance du foyer et de la directrice.

2. Equation réduite

Soit $M\ (x, y)$ un point du lieu. On a :

$$d(M, d) = d(M, F)$$

Choix du repère (orthonormé) :
Appelons $|p|$ la distance entre la droite *d* et le foyer *F*.
Axe *Ox* : axe de symétrie de la parabole.
Cet axe coupe la directrice au point *L.*
Origine des axes : milieu de $[LF]$
Axe *Oy* : médiatrice du segment $[LF]$

Les coordonnées de F sont $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ et la droite *d* a pour équation $x = -\frac{p}{2}$
Par définition, on a successivement :

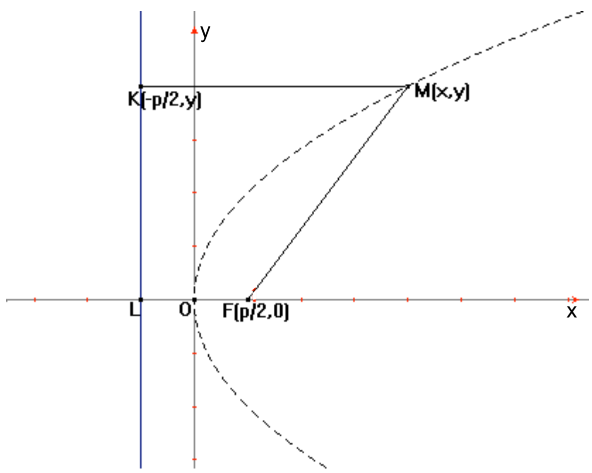
$$d(M, d) = d(M, F)$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

$$2px = y^2$$

$$\boxed{y^2 = 2px}$$



qui est l'équation réduite de la parabole.

Les coordonnées des <u>sommets</u> de la parabole sont :

- Intersection avec l'axe *Ox* :
  En remplaçant *y* par 0 dans l'équation de la parabole, on trouve une valeur pour *x* : 0. Les coordonnées du sommet de la parabole situé sur l'axe *Ox* sont donc:

$$S(0,0)$$

- Intersection avec l'axe *Oy*
  En remplaçant *x* par 0 dans l'équation de la parabole, on trouve une valeur pour *y* : 0. Les coordonnées du sommet de la parabole situé sur l'axe *Oy* sont donc :

$$S(0,0)$$

On retrouve le même sommet : la parabole n'a qu'un seul sommet.

Foyer : $F\left(\frac{p}{2},0\right)$

Axe de symétrie : $y = 0$

3. Étude de la fonction $f : x \to y = \sqrt{2px}$

1. La fonction est partout définie dans $\boldsymbol{R}^{+}$. Elle est continue dans son domaine de définition.

2. Parité

Cette fonction n'est ni paire ni impaire puisqu'elle n'est définie que pour les valeurs positives de la variable.

3. Étude de y
   Zéros : 0
   Signe : $y \geq 0$

x	0	
y	0	+

1. Étude de y'
   $y' = \dfrac{\sqrt{2p}}{2\sqrt{x}}$
   Zéros : néant
   Signe : $y' > 0$

x	0	
y'	/	+

2. Étude de y''
   $y'' = \dfrac{-\sqrt{2p}}{4\sqrt{x^3}}$
   Zéros : néant
   Signe : $y'' < 0$

x	0	
y''	/	-

3. Asymptotes[1]

A.V. : Il est évident qu'il n'y a pas d'asymptote verticale.

A.H. : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2px} = +\infty$ pas d'A.H.

A.O. : $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2px}}{x} = 0$ pas d'A.O.

[1] Signalons qu'il existe une direction asymptotique, sans asymptote : cette direction asymptotique est celle de l'axe de la parabole

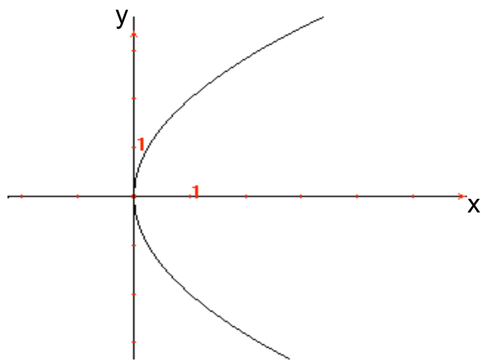
4. Points supplémentaires (dans le cas où $p = 2$)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	2	2,83	3,46	4	4,47	4,90	5,29	5,66	6

5. Tableau récapitulatif

x	0	
y'	/	+
y''	/	-
y	0	$\nearrow$
	S	

6. Graphique (dans le cas où $p = 2$)



Remarque

La partie de la parabole en dessous de l'axe des *x* correspond au graphique de la fonction $f : x \to y = -\sqrt{2px}$ et complète celui de $y^2 = 2px$.

Chapitre 5: Excentricité

1. Définition

Une conique est le lieu géométrique des points dont le rapport des distances à un point fixe, appelé <u>foyer</u>, et à une droite fixe ne comprenant pas ce point, appelée <u>directrice</u>, est une constante non nulle appelée <u>excentricité</u>.

2. Notation

Nous noterons *F* le foyer, *d* la directrice correspondant à ce foyer, *e* l'excentricité et *p* la distance du foyer à la directrice.

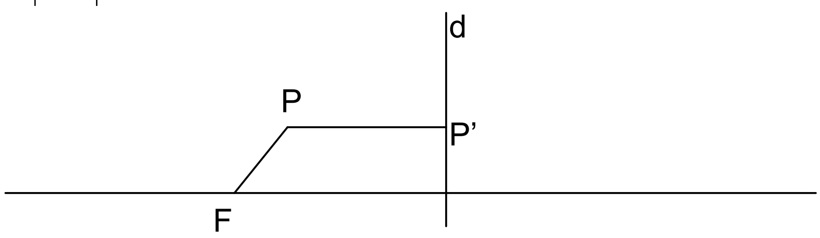
On a évidemment : $p>0$ et $e>0$

3. Lieu géométrique

Soit $P(x,y)$ un point du lieu.

P appartient à la conique de foyer *F*, de directrice *d* et d'excentricité *e*
si et seulement si

$\dfrac{|FP|}{|P'P|}=e$, où *P'* est la projection orthogonale de *P* sur *d*



4. Cas particulier

Si $e=1$ la conique est une parabole, comme cela a été vu précédemment.

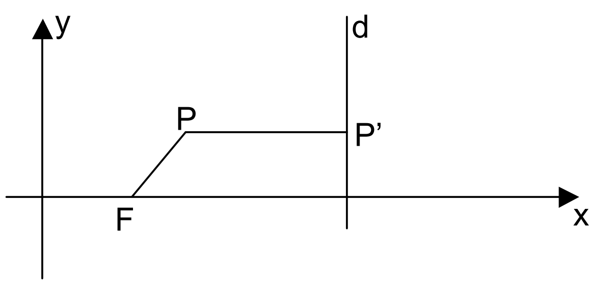
5. Équation du lieu lorsque $e \neq 1$

- Choix du repère (orthonormé) : axe *Ox* : droite perpendiculaire à *d* passant par *F.*
  axe *Oy*: "provisoirement" une parallèle quelconque à *d.*
- Coordonnées de *F* : $F(k,0)$ où k est une valeur à fixer lors du choix définitif de l'axe *Oy* .
- Équation de *d* : $x=k+p$

Soit $P(x,y)$ un point du lieu. On a successivement :

$$|FP|=\sqrt{(x-k)^2+y^2}$$

$$|PP'|=|k+p-x|$$



$$|FP|=e.|PP'|$$

$$\sqrt{(x-k)^2+y^2}=e.\left|k+p-x\right|$$
$$(x-k)^2+y^2=e^2(k+p-x)^2$$
$$(x-k)^2+y^2-e^2(k+p-x)^2=0 \qquad (*)$$

Pour obtenir l'équation réduite[2], il faut que le coefficient de *x* soit nul.
Le terme en *x* de cette équation du lieu est

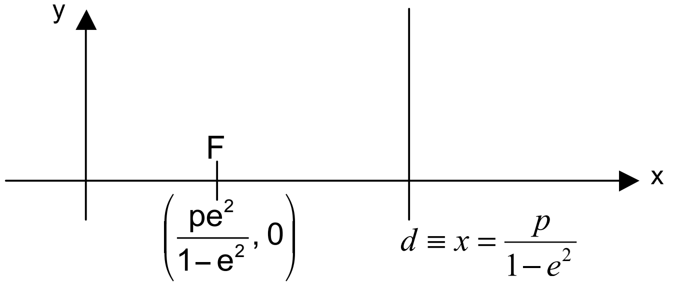
$$-2kx-e^2(-2kx-2px)=2(ke^2+pe^2-k)x$$

Le coefficient de *x* est nul lorsque $pe^2=k-ke^2$

Choisissons donc $k=\dfrac{pe^2}{1-e^2}$.

Avec cette valeur de *k*, les coordonnées de *F* sont $\left(\dfrac{pe^2}{1-e^2},0\right)$ et l'équation de la directrice *d* s'écrit :

$$x=k+p$$
$$x=\frac{pe^2}{1-e^2}+p$$
$$x=\frac{p}{1-e^2}$$



L'équation $(*)$ du lieu devient maintenant

$$\left(x-\frac{pe^2}{1-e^2}\right)^2+y^2-e^2\left(\frac{p}{1-e^2}-x\right)^2=0$$

$$x^2-2x\frac{pe^2}{1-e^2}+\frac{p^2e^4}{\left(1-e^2\right)^2}+y^2-e^2\left(\frac{p^2}{\left(1-e^2\right)^2}-2\frac{p}{1-e^2}x+x^2\right)=0$$

$$x^2+\frac{p^2e^4}{\left(1-e^2\right)^2}+y^2-\frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2}-e^2x^2=0$$

$$\left(1-e^2\right)x^2+y^2=\frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2}\left(1-e^2\right) \qquad \left(1-e^2\right)x^2+y^2=\frac{e^2p^2}{1-e^2}$$

---

[2] l'équation générale d'une conique non rapportée à ses axes (équation du deuxième degré) s'écrit :
$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.
L'équation réduite d'une conique centrée est une équation qui ne contient pas de terme en xy, en x et en y.

$$\frac{\left(1-e^2\right)x^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}+\frac{y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}=1 \qquad \frac{x^2}{\frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2}}+\frac{y^2}{\frac{e^2p^2}{1-e^2}}=1$$

6. Discussion

$\dfrac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2}$ est toujours positif.

$\dfrac{e^2p^2}{1-e^2}$ est positif si et seulement si $1-e^2>0$, c'est-à-dire si et seulement si $0<e<1$, puisque l'excentricité est positive.

Premier cas
L'excentricité *e* de la conique est inférieure à 1.

L'équation

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ep}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{ep}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}=1$$

est une équation du type $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=\dfrac{ep}{1-e^2}$ et $b=\dfrac{ep}{\sqrt{1-e^2}}$. C'est donc l'équation d'une ellipse rapportée à ses axes.

Lien avec la définition précédente

L'abscisse du foyer est $\dfrac{e^2p}{1-e^2}$.
D'autre part, on a

$$c^2=a^2-b^2=\frac{e^2p^2}{\left(1-e^2\right)^2}-\frac{e^2p^2}{1-e^2}=\frac{e^2p^2-e^2p^2\left(1-e^2\right)}{\left(1-e^2\right)^2}=\frac{e^4p^2}{\left(1-e^2\right)^2}$$

ce qui entraîne

$$c=\sqrt{\frac{e^4p^2}{\left(1-e^2\right)^2}}=\frac{e^2p}{1-e^2}=e.a \quad \Rightarrow c=e.a \quad \Rightarrow e=\frac{c}{a}$$

Les foyers F intervenant dans les deux définitions sont donc confondus. L'équation de la directrice correspondante s'écrit

$$x=\frac{p}{1-e^2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{c}{e^2} \quad \text{ou} \quad x=\frac{a^2}{c}$$

L'abscisse du second foyer est $-\dfrac{e^2p}{1-e^2}$.

Il lui correspond une directrice d'équation $x=-\dfrac{a^2}{c}$

La symétrie orthogonale d'axe Oy explique ce fait.
Chaque foyer est associé à une directrice.

<u>Deuxième cas</u>
L'excentricité *e* de la conique est supérieure à 1.
L'équation

$$\frac{x^2}{\left(\frac{ep}{e^2-1}\right)^2}-\frac{y^2}{\left(\frac{ep}{\sqrt{e^2-1}}\right)^2}=1$$

est une équation du type $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ avec $a=\frac{ep}{e^2-1}$ et $b=\frac{ep}{\sqrt{e^2-1}}$. C'est donc l'équation d'une hyperbole rapportée à ses axes.

Lien avec la définition précédente

L'abscisse du foyer est $\frac{e^2p}{e^2-1}$.
D'autre part, on a

$$c^2=a^2+b^2=\frac{e^2p^2}{\left(e^2-1\right)^2}+\frac{e^2p^2}{e^2-1}=\frac{e^2p^2+e^2p^2\left(e^2-1\right)}{\left(e^2-1\right)^2}=\frac{e^4p^2}{\left(e^2-1\right)^2}$$

ce qui entraîne

$$c=\sqrt{\frac{e^4p^2}{\left(e^2-1\right)^2}}=\frac{e^2p}{e^2-1}.$$

Les foyers F intervenant dans les deux définitions sont donc confondus. L'équation de la directrice correspondante s'écrit

$$x=\frac{c}{e^2}$$

ou

$$x=\frac{a^2}{c}$$

L'abscisse du second foyer est $-\frac{e^2p}{e^2-1}$. Il lui correspond une directrice d'équation

$$x=-\frac{a^2}{c}$$

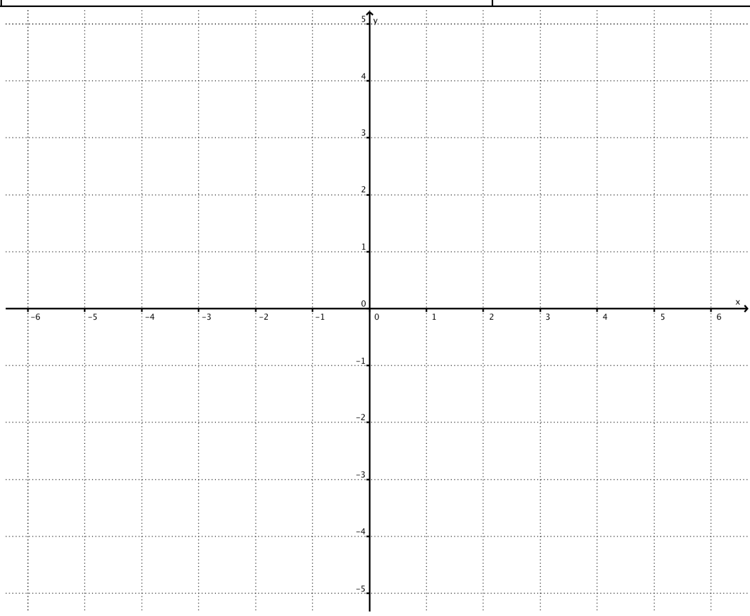
La symétrie orthogonale d'axe Oy explique ce fait.
Chaque foyer est associé à une directrice.

Résumé : équation réduite de l'**ELLIPSE** (dans un repère orthonormé du plan) (a>b)

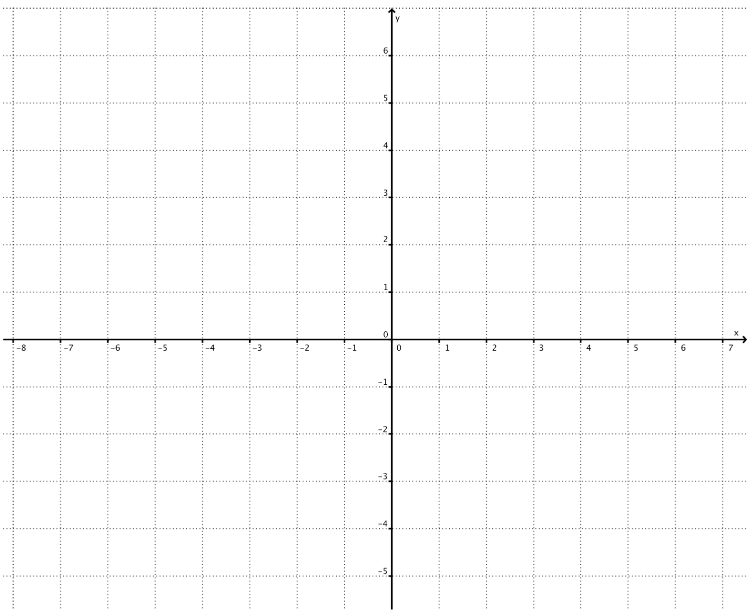
	Grand axe focal sur l'axe x	**Grand axe focal sur l'axe y**
	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
Centre	Le point O(0 ;0)	Le point O(0 ;0)
Axe focal	L'axe des x	L'axe des y
« Grand axe »	2a	2a
Axe non focal	L'axe des y	L'axe des x
« Petit axe »	2b	2b
Distance focale	2c tel que $c=\sqrt{a^2-b^2}$	2c tel que $c=\sqrt{a^2-b^2}$
Foyers	F(c ;0) et F'(-c ;0)	F(0 ;c) et F'(0 ;-c)
Directrices associées	$d_F \equiv x=\frac{a^2}{c}$ et $d_{F'} \equiv x=-\frac{a^2}{c}$	$d_F \equiv y=\frac{a^2}{c}$ et $d_{F'} \equiv y=-\frac{a^2}{c}$
Sommets	(±a ;0) , (0 ; ±b)	(0 ; ±a) , (±b ;0)
Excentricité	$0<e=\frac{c}{a}<1$	$0<e=\frac{c}{a}<1$

Exemples :

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$$



$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$$

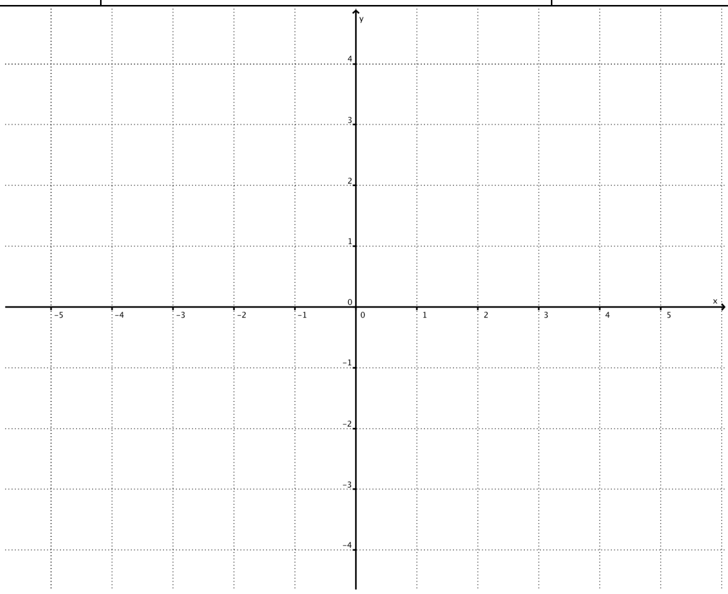


Résumé : équation réduite de l'**HYPERBOLE** (dans un repère orthonormé du plan)

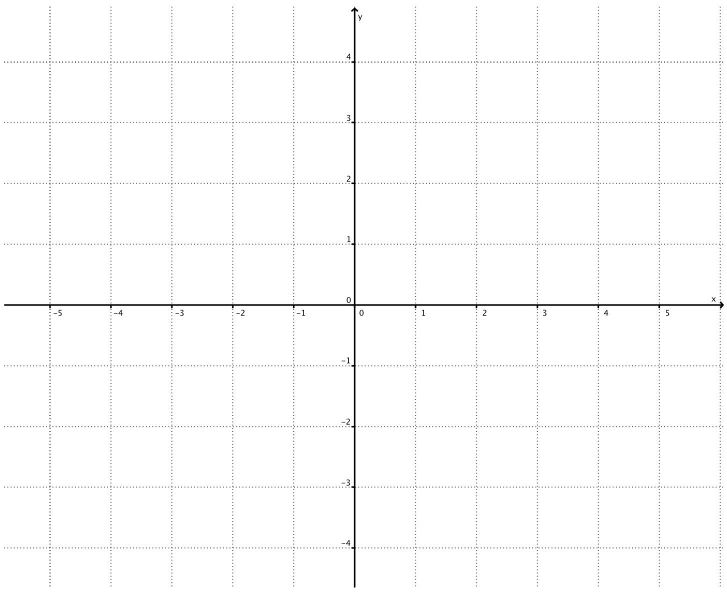
	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
Centre	Le point O(0 ;0)	Le point O(0 ;0)
Axe focal	L'axe des x	L'axe des y
Axe non focal	L'axe des y	L'axe des x
Distance focale	2c tel que $c=\sqrt{a^2+b^2}$	2c tel que $c=\sqrt{a^2+b^2}$
Foyers	F(c ;0) et F'(-c ;0)	F(0 ;c) et F'(0 ;-c)
Directrices associées	$d_F \equiv x=\frac{a^2}{c}$ et $d_{F'} \equiv x=-\frac{a^2}{c}$	$d_F \equiv y=\frac{a^2}{c}$ et $d_{F'} \equiv y=-\frac{a^2}{c}$
Sommets	(±a ;0)	(0 ;±a)
Asymptotes	$A_1 \equiv y=\frac{b}{a}x$ et $A_2 \equiv y=-\frac{b}{a}x$	$A_1 \equiv y=\frac{a}{b}x$ et $A_2 \equiv y=-\frac{a}{b}x$
Excentricité	$e=\frac{c}{a}>1$	$e=\frac{c}{a}>1$

Exemples :

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$



$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=-1$



EXERCICES

1. Dans un repère orthonormé du plan, on donne la conique Γ de foyer F(4 ;0), de directrice associée d dont l'équation est x-1=0 et d'excentricité 2.
a) Quelle est la nature de Γ ?
b) Construis un sommet S de Γ situé sur l'axe focal m. Quelle est sa coordonnée ?
c) Construis un point M de Γ, autre que S ainsi que son symétrique M' par rapport à l'axe focal.
d) Quelle est l'équation de Γ ? Donnes-en une expression simplifiée.
e) Quelle est la coordonnée du (des) points de Γ d'abscisse 3, d'abscisse –1, d'ordonnée –6 ?

2. Trouve l'équation de la parabole de foyer F(-2 ;0) et de directrice associée x=2. Quelle est la coordonnée de son sommet ?

3. Quelle est la nature du lieu géométrique L des points M du plan tels que 4.d(M,T)=3.d(M,K), lorsque T est un point fixe du plan, d est une droite ne comprenant pas T et K est le pied sur d de la perpendiculaire issue de M à d?

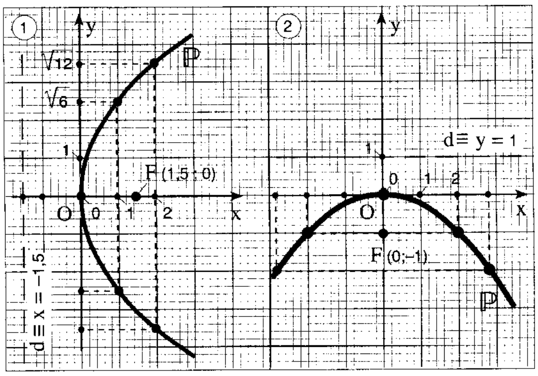
4. Soit les coniques : $\Gamma_1 \equiv \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad \Gamma_2 \equiv \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

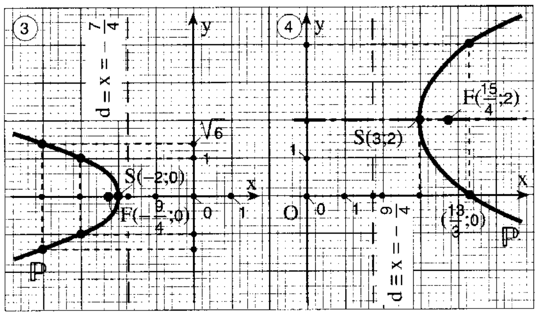
Pour chacune de ces coniques, trouve :
a) sa nature b) la coordonnée du centre, des foyers, des sommets c) une équation cartésienne des directrices et des asymptotes (éventuelles), la distance focale, l'excentricité
e) une équation f) une construction point par point.

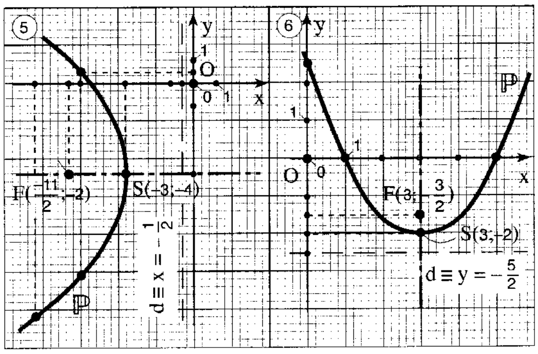
5. On demande une équation des coniques de centre O(0 ;0) desquelles on dit :
a) la longueur du grand axe (sur x) est 16 et la distance focale est 12.
b) la distance focale est 20, l'axe focale est sur y, l'excentricité est $\sqrt{20}$
c) la longueur du petit axe (sur y) est 10 et l'excentricité vaut 0,2
d) la longueur du grand axe (sur y) est 32 et elle passe par le point de coordonnée (1 ;8)
e) l'excentricité est comprise entre 0 et 1 et elle passe par les points $A(\frac{\sqrt{3}}{2};1)$ et $B(\frac{\sqrt{2}}{2};\sqrt{2})$
f) la distance focale vaut 24 et l'angle aigu des asymptotes a une amplitude de 60°
g) un foyer a pour coordonnée (-3 ;0), la directrice associée à l'autre foyer a pour équation x=2 et l'excentricité vaut $\sqrt{3}$

6. On demande une équation des paraboles dont le sommet est le point O(0 ;0). Pour chacune de ces paraboles, on donne en plus :
a) l'axe focal est l'axe x, l'abscisse du foyer est positive et le paramètre vaut 3
b) l'axe focal est l'axe y, l'ordonnée du foyer est négative et le paramètre vaut 5
c) le foyer F(2 ;0)
d) la directrice d'équation x-3=0
e) le foyer F(0 ;-1)
f) la directrice d'équation y+5=0
g) l'axe y comme axe focal et un point P(3 ;-4)

7. Observe les graphiques et fais-leur correspondre une des équations proposées :

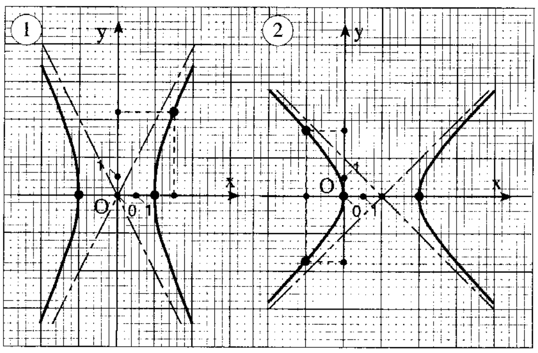


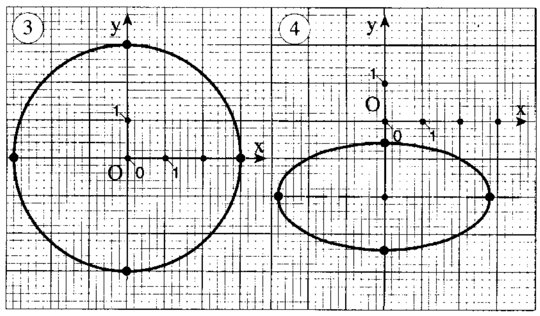


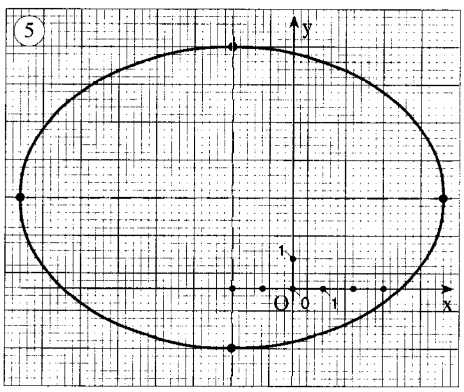


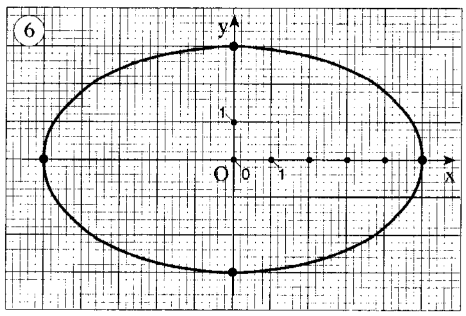
A	$x^2 + 4y = 0$	D	$y^2 = 6x$
B	$(y+4)^2 + 10(x+3) = 0$	E	$(y-2)^2 = 3x - 9$
C	$(x-3)^2 - 2y - 4 = 0$	F	$x + y^2 + 2 = 0$

8. Observe les dessins et fais-leur correspondre une des équations proposées :









A	$\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$
B	$4x^2 - y^2 = 16$
C	$(x-2)^2 - y^2 = 4$
D	$x^2 + 4(y+2)^2 = 8$
E	$x^2 + y^2 = 9$
F	$\dfrac{(x+2)^2}{49} + \dfrac{(y-3)^2}{25} = 1$

9. Trouve une équation cartésienne des hyperboles :

a) d'axe focal confondu avec l'axe y, qui coupe l'axe y en des points d'ordonnées respective 2 et –2 et dont les asymptotes ont pour équation respective $y = \frac{1}{3}x$ et $y = -\frac{1}{3}x$

b) de foyer F(0 ;-3) et F'(0 ;3) et tel que le petit axe (sur x) mesure 4.

10. Identifie les courbes suivantes, dessine-les dans un repère orthonormé du plan et donne leurs caractéristiques :

1) $4x^2 + 9y^2 - 36 = 0$
2) $9x^2 - y^2 + 18 = 0$
3) $9(x-2)^2 + 4(y+1)^2 - 36 = 0$
4) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$
5) $4(y-3)^2 + x = 0.$

11. Soit les coniques :

$$\Gamma_1 \equiv 9x^2 - 4y^2 - 36 = 0 \text{ et } \Gamma_2 \equiv 8x^2 + 9y^2 - 18 = 0$$

a) Quelle est leur nature ?
b) Trouve : la coordonnée de leur centre, de leurs foyers, de leurs sommets, une équation cartésienne de leurs directrices et asymptotes, leur distance focale et leur excentricité, une équation de ces coniques.
c) Etablis une équation des coniques Γ_1' et Γ_2' respectivement image de Γ_1 et Γ_2 par la translation de vecteur (-2 ;3)
d) Dessine Γ_1 , Γ_2 , Γ_1' et Γ_2'

12. Identifie les courbes suivantes, dessine-les dans un repère orthonormé du plan et donne leurs caractéristiques :

$$\Gamma_1 \equiv 25(x-1)^2 + 16(y+2)^2 = 400 \qquad \Gamma_2 \equiv \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

13. Détermine le genre des coniques suivantes :

a) $4x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$
b) $2x^2 - 5y^2 - 4x - 10y - 13 = 0$
c) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y + 29 = 0$
d) $x^2 - 2x + 4y^2 + 8y - 17 = 0$
e) $25x^2 - 16y^2 + 100x + 96y - 144 = 0$
f) $x + y^2 - 4y + 2 = 0$

14. Soit les deux courbes suivantes : $C_1 \equiv x^2+y^2-4x-6y-36=0$ et $C_2 \equiv x^2+y^2-10x+2y+22=0$

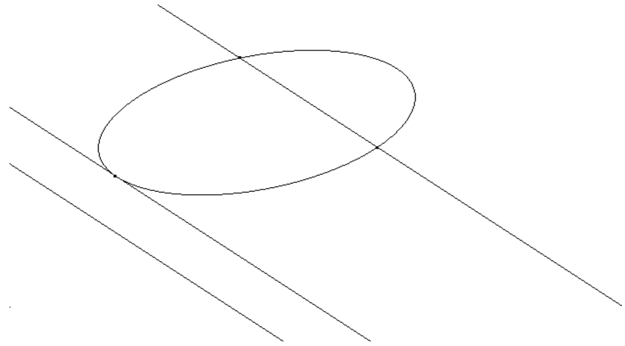
a) Détermine de quelles courbes il s'agit
b) Démontre que ces 2 courbes sont tangentes entre elles et détermine la coordonnée du point de contact.

Chapitre 6: Positions relatives d'une droite et d'une conique

1. Positions relatives d'une droite *d* et d'une ellipse *E*

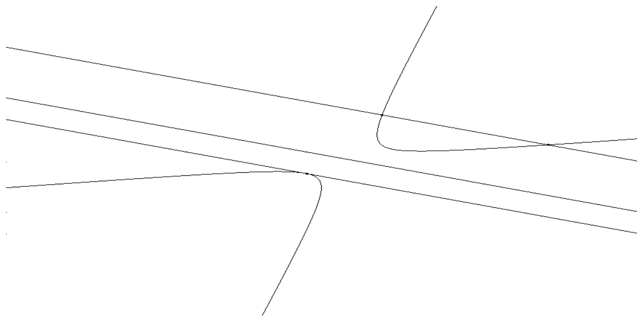
Trois cas sont possibles :

- ♦ *d* coupe *E* en deux points distincts :
  d est sécante à *E*.
- ♦ *d* coupe *E* en deux points confondus :
  d est tangente à *E*.
- ♦ *d* ne coupe pas *E* :
  d est non sécante à *E*.



2. Positions relatives d'une droite *d* et d'une hyperbole *H*

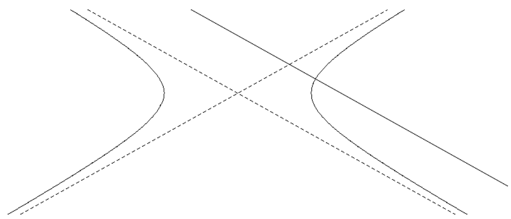
❖ La droite n'est pas parallèle aux asymptotes.



Trois cas sont possibles :

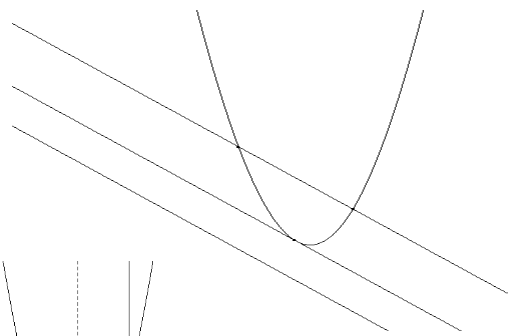
- ♦ *d* coupe *H* en deux points distincts :
  d est sécante à *H*.
- ♦ *d* coupe *H* en deux points confondus :
  d est tangente à *H*.
- ♦ *d* ne coupe pas *H* :
  d est non sécante à *H*.

❖ Si *d* est parallèle à une asymptote sans être confondue, alors d coupe *H* en un seul point et … au point à l'infini !



3. Positions relatives d'une droite *d* et d'une parabole *P*

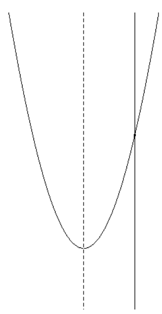
❖ La droite *d* n'est pas parallèle à l'axe focal.



Trois cas sont possibles :

- ♦ *d* coupe *P* en deux points distincts :
  d est sécante à *P*.
- ♦ *d* coupe *P* en deux points confondus :
  d est tangente à *P*.
- ♦ *d* ne coupe pas *P* :
  d est non sécante à *P*.

❖ La droite *d* est parallèle à l'axe focal : *d* coupe *P* en un seul point et … au point à l'infini !



Chapitre 7: Tangente à une conique en un de ses points

1. Tangente à une ellipse en un de ses points

Exemple

Déterminer l'équation de la tangente à l'ellipse $E \equiv 25x^2 + 16y^2 = 100$ en son point *A* d'abscisse 1 et d'ordonnée négative.

Coordonnées du point *A* : $16y^2 = 100 - 25$

$$y^2 = \frac{75}{16}$$

$$y = \pm\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

Le point *A* cherché a donc pour coordonnées $\left(1, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$.

<u>1[re] méthode</u> : <u>Équation aux abscisses</u>

La tangente *t* comprend le point $A\left(1, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$ et son coefficient angulaire m est inconnu. L'équation de la tangente se trouve donc parmi la famille des droites d'équation

$$y + \frac{5\sqrt{3}}{4} = m(x-1)$$

Cherchons parmi ces droites celle qui a un seul point d'intersection avec l'ellipse *E*. On a successivement :

$$\begin{cases} 25x^2 + 16y^2 = 100 \\ y + \frac{5\sqrt{3}}{4} = m(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 + 16y^2 = 100 & (1) \\ y = m(x-1) - \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 + 16\left[m(x-1) - \frac{5\sqrt{3}}{4}\right]^2 = 100 \\ y = m(x-1) - \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 25x^2 + 16\left(m^2(x-1)^2 - \frac{5\sqrt{3}}{2}m(x-1) + \frac{25.3}{16}\right) = 100 \\ y = m(x-1) - \frac{5\sqrt{3}}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(25+16m^2\right)x^2-\left(32m^2+40\sqrt{3}m\right)x+16m^2+40\sqrt{3}m-25=0\\ y=m(x-1)-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\end{cases}$$

Comme il n'y a qu'un point d'intersection avec l'ellipse, le discriminant de l'équation aux abscisses (c'est-à-dire la première de ce dernier système) doit être nul.

$$\Delta=\left(-40\sqrt{3}m-32m^2\right)^2-4\left(25+16m^2\right)\left(16m^2+40\sqrt{3}m-25\right)=0$$

$$48m^2-40\sqrt{3}m+25=0$$

$$\Delta=\left(40\sqrt{3}\right)^2-4.48.25=0$$

$$m=\frac{40\sqrt{3}}{2.48}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$

L'équation de la tangente est donc :

$$t\equiv\quad y=\frac{5\sqrt{3}}{12}\left(x-1\right)-\frac{5\sqrt{3}}{4}$$

c'est à dire

$$t\equiv\quad y=\frac{5\sqrt{3}}{12}x-\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

<u>2^e méthode</u> : <u>Tangente au graphique d'une fonction en un de ses points</u>

L'équation $E\equiv 25x^2+16y^2=100$ peut s'écrire $y=\pm\dfrac{1}{4}\sqrt{100-25x^2}$

On cherche à déterminer l'équation de la tangente à l'ellipse en son point *A* d'abscisse 1 et d'ordonnée négative, c'est à dire $A\left(1,-\dfrac{5\sqrt{3}}{4}\right)$.

Considérons la fonction

$$f:\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{R}:x\rightarrow-\frac{1}{4}\sqrt{100-25x^2}$$

L'équation de la tangente *t* au point d'abscisse *a* du graphique d'une fonction *f* est

$$y-f(a)=f'(a)\left(x-a\right)$$

$$f'(x)=\left(-\frac{1}{4}\sqrt{100-25x^2}\right)'=-\frac{1}{4}\frac{\left(100-25x^2\right)'}{2\sqrt{100-25x^2}}=-\frac{1}{4}\frac{-50x}{2\sqrt{100-25x^2}}=\frac{25x}{4\sqrt{100-25x^2}}$$

$$f'(a)=\frac{25}{4\sqrt{100-25}}=\frac{25}{4\sqrt{75}}=\frac{25}{4.5\sqrt{3}}=\frac{5}{4\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$t\equiv\quad y-\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{12}\left(x-1\right)$$

$$t\equiv\quad y=\frac{5\sqrt{3}}{12}x-\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

3^e méthode : Dérivées

Pour trouver le coefficient angulaire de la tangente t au point $A\left(1,\frac{-5\sqrt{3}}{4}\right)$, dérivons les deux membres de l'équation de l'ellipse par rapport à x. Il vient successivement :

$$25x^2+16y^2=100$$
$$50x+32y.y'=0$$
$$y'=-\frac{50x}{32y}=-\frac{25x}{16y}$$

La valeur de y' au point A est

$$y'(A)=-\frac{25}{16}\left(\frac{1}{-\frac{5\sqrt{3}}{4}}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$

$$t\equiv\quad y-\left(-\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{5\sqrt{3}}{12}(x-1)$$

$$t\equiv\quad y=\frac{5\sqrt{3}}{12}x-\frac{5\sqrt{3}}{3}$$

Généralisation de la troisième méthode

Considérons l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Cherchons l'équation de la tangente à cette ellipse en un de ses points $A(x_A,y_A)$.

Dérivons les deux membres de l'équation par rapport à x.

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y.y'}{b^2}=0$$
$$y'=-\frac{b^2x}{a^2y}$$

au point A :

$$y'(A)=-\frac{b^2x_A}{a^2y_A}$$

L'équation de la tangente t au point A sera donnée par : $y-y_A=y'_A(x-x_A)$

$$y-y_A=-\frac{b^2x_A}{a^2y_A}(x-x_A)$$

$$a^2y_A(y-y_A)=-b^2x_A(x-x_A)$$

$$b^2x_Ax+a^2y_Ay=b^2x_A^2+a^2y_A^2$$

$$\frac{x_Ax}{a^2}+\frac{y_Ay}{b^2}=\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}$$

Le point A appartient à l'ellipse, donc $\frac{x_A^2}{a^2}+\frac{y_A^2}{b^2}=1$

Équation de la tangente à l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ au point A : $\boxed{\frac{x_Ax}{a^2}+\frac{y_Ay}{b^2}=1}$

2. Tangente à une hyperbole en un de ses points

Exemple

Déterminer l'équation de la tangente à l'hyperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ au point *A* d'ordonnée 5 et d'abscisse négative.

Coordonnées du point *A* : $9x^2 = 16.25 - 144$

$$x^2 = \frac{256}{9}$$

$$x = \pm\frac{16}{3}$$

Le point A cherché a donc pour coordonnées $\left(-\frac{16}{3}, 5\right)$.

<u>1re méthode : Équation aux abscisses</u>

La tangente *t* comprend le point $A\left(-\frac{16}{3}, 5\right)$ et son coefficient angulaire *m* est inconnu. L'équation de la tangente se trouve donc parmi la famille des droites d'équation

$$y - 5 = m\left(x + \frac{16}{3}\right)$$

Cherchons parmi ces droites celle qui a un seul point d'intersection avec l'hyperbole *H*. On a successivement :

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \\ y - 5 = m\left(x + \frac{16}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \qquad (1) \\ y = 5 + m\left(x + \frac{16}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(5 + m\left(x + \frac{16}{3}\right)\right)^2 + 144 = 0 \\ y = 5 + m\left(x + \frac{16}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(25 + 10m\left(x + \frac{16}{3}\right) + m^2\left(x + \frac{16}{3}\right)^2\right) + 144 = 0 \\ y = 5 + m\left(x + \frac{16}{3}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(9-16m^2\right)x^2+\left(-\frac{512}{3}m^2-160m\right)x-\frac{4096}{9}m^2-\frac{2560}{3}m-256=0\\ y=5+m\left(x+\frac{16}{3}\right)\end{cases}$$

Comme il n'y a qu'un point d'intersection avec l'hyperbole, le discriminant de l'équation aux abscisses doit être nul.

$$\Delta=\left(-\frac{512}{3}m^2-160m\right)^2-4\left(9-16m^2\right)\left(-\frac{4096}{9}m^2-\frac{2560}{3}m-256\right)=0$$

$$25m^2+30m+9=0$$
$$\Delta=30^2-4.25.9=0$$
$$m=\frac{-30}{2.25}=-\frac{3}{5}$$

L'équation de la tangente est

$$t\equiv\quad y=5-\frac{3}{5}\left(x+\frac{16}{3}\right)$$

c'est à dire

$$t\equiv\quad y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$$

2e méthode : Tangente au graphique d'une fonction en un de ses points

L'équation $H\equiv 9x^2-16y^2+144=0$ peut s'écrire sous la forme $y=\pm\frac{1}{4}\sqrt{9x^2+144}$.

On cherche à déterminer l'équation de la tangente à l'hyperbole au point *A* d'ordonnée 5 et d'abscisse négative, c'est à dire $A\left(-\frac{16}{3},5\right)$.

Considérons la fonction

$$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}:x\to\frac{1}{4}\sqrt{9x^2+144}$$

L'équation de la tangente *t* au point d'abscisse *a* du graphique d'une fonction *f* est

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{4}\sqrt{9x^2+144}\right)'=\frac{1}{4}\frac{\left(9x^2+144\right)'}{2\sqrt{9x^2+144}}=\frac{1}{4}\frac{18x}{2\sqrt{9x^2+144}}=\frac{9x}{4\sqrt{9x^2+144}}$$

$$f'(a)=\frac{9\left(-\frac{16}{3}\right)}{4\sqrt{9\left(-\frac{16}{3}\right)^2+144}}=\frac{-3.16}{4\sqrt{400}}=\frac{-3.16}{4.20}=\frac{-3}{5}$$

$$t\equiv\quad y-5=-\frac{3}{5}\left(x-\left(-\frac{16}{3}\right)\right)$$
$$t\equiv\quad y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$$

3e méthode : Dérivées

Pour trouver le coefficient angulaire de la tangente *t* au point $A\left(-\frac{16}{3},5\right)$, dérivons les deux membres de l'équation de l'hyperbole par rapport à *x*. Il vient successivement :

$$9x^2-16y^2+144=0$$
$$18x-32y.y'=0$$
$$y'=\frac{-18x}{-32y}=\frac{9x}{16y}$$

La valeur de *y'* au point *A* est

$$y'(A)=\frac{9\left(-\frac{16}{3}\right)}{16.5}=-\frac{3}{5}$$

$$t\equiv\quad y-5=-\frac{3}{5}\left(x-\left(-\frac{16}{3}\right)\right)$$
$$t\equiv\quad y=-\frac{3}{5}x+\frac{9}{5}$$

Généralisation de la troisième méthode

Considérons l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

Cherchons l'équation de la tangente à cette hyperbole en un de ses points $A\left(x_A,y_A\right)$.

La démonstration est identique à celle de l'ellipse

Équation de la tangente à l'hyperbole $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ au point *A* : $\boxed{\frac{x_Ax}{a^2}-\frac{y_Ay}{b^2}=1}$

3. Tangente à une parabole en un de ses points

Exemple

Déterminer l'équation de la tangente t à la parabole $P \equiv y^2 = 5x$ en son point *A* d'abscisse $\frac{2}{5}$ et d'ordonnée positive.

Coordonnées du point *A* : $y^2 = 5.\frac{2}{5}$

$$y = \pm\sqrt{2}$$

Le point A cherché a donc pour coordonnées $\left(\frac{2}{5}, \sqrt{2}\right)$

<u>1re méthode</u> : <u>Équation aux abscisses</u>

La tangente *t* comprend le point $\mathrm{A}\left(\frac{2}{5}, \sqrt{2}\right)$ et son coefficient angulaire *m* est inconnu. L'équation de la tangente se trouve donc parmi la famille des droites d'équation

$$y - \sqrt{2} = m\left(x - \frac{2}{5}\right)$$

Cherchons parmi ces droites celle qui a un seul point d'intersection avec la parabole *P*. On a successivement :

$$\begin{cases} y^2 = 5x \\ y - \sqrt{2} = m\left(x - \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 5x = 0 & (1) \\ y = \sqrt{2} + m\left(x - \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2} + m\left(x - \frac{2}{5}\right)\right)^2 - 5x = 0 \\ y = \sqrt{2} + m\left(x - \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 + 2\sqrt{2}m\left(x - \frac{2}{5}\right) + m^2\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 - 5x = 0 \\ y = \sqrt{2} + m\left(x - \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2x^2 + \left(-\frac{4}{5}m^2 + 2\sqrt{2}m - 5\right)x + 2 - \frac{4\sqrt{2}}{5}m + \frac{4}{25}m^2 = 0 \\ y = \sqrt{2} + m\left(x - \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

Comme il n'y a qu'un point d'intersection avec la parabole, le discriminant de l'équation aux abscisses doit être nul.

$$\Delta = \left(-\frac{4}{5}m^2 + 2\sqrt{2}m - 5\right)^2 - 4m^2\left(2 - \frac{4\sqrt{2}}{5}m + \frac{4}{25}m^2\right) = 0$$

$$8m^2 - 20\sqrt{2}m + 25 = 0$$

$$\Delta = \left(20\sqrt{2}\right)^2 - 4.8.25 = 0$$

$$m = \frac{20\sqrt{2}}{16} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

L'équation de la tangente est donc :

$$t \equiv \quad y = \sqrt{2} + \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{2}{5}\right)$$

c'est à dire

$$t \equiv \quad y = \frac{5\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

<u>2e méthode : Tangente au graphique d'une fonction en un de ses points</u>

L'équation $P \equiv y^2 = 5x$ peut s'écrire sous la forme $y = \pm\sqrt{5x}$

On cherche à déterminer l'équation de la tangente à la parabole au point *A* d'abscisse $\frac{2}{5}$ et d'ordonnée positive, c'est-à-dire $A\left(\frac{2}{5}, \sqrt{2}\right)$

Considérons la fonction

$$f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} : x \to \sqrt{5x}$$

L'équation de la tangente *t* au point d'abscisse *a* du graphique d'une fonction *f* est

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{5x}\right)' = \frac{(5x)'}{2\sqrt{5x}} = \frac{5}{2\sqrt{5x}}$$

$$f'(a) = \frac{5}{2\sqrt{5.\frac{2}{5}}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$t \equiv \quad y - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{2}{5}\right)$$

$$t \equiv \quad y = \frac{5\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3^{e} méthode : Dérivées

Pour trouver le coefficient angulaire de la tangente *t* au point $A\left(\frac{2}{5},\sqrt{2}\right)$, dérivons les deux membres de l'équation de la parabole par rapport à *x*. Il vient successivement :

$$\begin{aligned} y^2 &= 5x \\ 2y.y' &= 5 \\ y' &= \frac{5}{2y} \end{aligned}$$

La valeur de *y'* au point *A* est

$$y'(A) = \frac{5}{2\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

$$t \equiv \quad y - \sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}\left(x - \frac{2}{5}\right)$$

$$t \equiv \quad y = \frac{5\sqrt{2}}{4}x + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Généralisation de la troisième méthode

Considérons la parabole d'équation $y^2 = 2px$

Cherchons l'équation de la tangente à cette parabole en un de ses points $A(x_A, y_A)$.

Dérivons les deux membres de l'équation par rapport à *x*. Il vient :

$$2y.y' = 2p$$

et

$$y' = \frac{p}{y}$$

au point *A* :

$$y'(A) = \frac{p}{y_A}$$

L'équation de la tangente *t* au point *A* sera donnée par :

$$y - y_A = f'(A)(x - x_A)$$

$$y - y_A = \frac{p}{y_A}(x - x_A)$$

$$y\,y_A - y_A^2 = p\,x - p\,x_A$$

Comme le point *A* appartient à la parabole, on a

$$y_A^2 = 2p\,x_A$$

et

$$y y_A - 2p x_A = p x - p x_A$$

$$y y_A = p x - p x_A + 2p x_A$$

$$y y_A = p(x + x_A)$$

L'équation de la tangente à la parabole $y^2 = 2px$ au point $A(x_A, y_A)$ est donc

$$\boxed{y y_A = p(x + x_A)}$$

4. Tangentes issues d'un point extérieur à une conique

Exemple 1
Déterminer l'équation des tangentes à l'hyperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ issues du point $A(1,3)$.

Les tangentes *t* comprennent le point $A(1,3)$ et le coefficient angulaire *m* est inconnu. Les équations des tangentes se trouvent donc parmi la famille des droites:

$$y - 3 = m(x - 1)$$

Cherchons parmi ces droites celles qui ont un seul point d'intersection avec l'hyperbole *H*. On a successivement :

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \\ y - 3 = m(x-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \\ y = m(x-1) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(m(x-1) + 3\right)^2 + 144 = 0 \\ y = m(x-1) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(m^2(x-1)^2 + 6m(x-1) + 9\right) + 144 = 0 \\ y = m(x-1) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(9 - 16m^2\right)x^2 + \left(32m^2 - 96m\right)x - 16m^2 + 96m = 0 \\ y = m(x-1) + 3 \end{cases}$$

Comme il n'y a qu'un point d'intersection avec l'hyperbole, le discriminant de l'équation aux abscisses doit être nul.

$$\Delta = \left[32m^2 - 96m\right]^2 - 4\left(9 - 16m^2\right)\left(96m - 16m^2\right) = 0$$

$$576m(17m - 6) = 0$$

$$m = 0 \quad \text{ou} \qquad m = \frac{6}{17}$$

Les équations des tangentes sont :

$$t_1 \equiv \quad y = 3$$

$$t_2 \equiv \quad y = \frac{6}{17}x + \frac{45}{17}$$

Exemple 1 bis

Déterminer l'équation des tangentes à l'hyperbole $H \equiv 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ issues du point $A(4,3)$.

Les tangentes *t* comprennent le point $A(4,3)$ et le coefficient angulaire m est inconnu. Les équations des tangentes se trouvent donc parmi la famille des droites

$$y - 3 = m(x - 4)$$

Cherchons parmi ces droites celles qui ont un seul point d'intersection avec l'hyperbole *H*.

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \\ y - 3 = m(x-4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 + 144 = 0 \\ y = m(x-4) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(m(x-4) + 3\right)^2 + 144 = 0 \\ y = m(x-4) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(m^2(x-4)^2 + 6m(x-4) + 9\right) + 144 = 0 \\ y = m(x-4) + 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(9 - 16m^2\right)x^2 - 32m\left(3 - 4m\right)x - 256m^2 + 384m = 0 \\ y = m(x-4) + 3 \end{cases}$$

Comme il n'y a qu'un point d'intersection avec l'hyperbole, le discriminant de l'équation aux abscisses doit être nul.

$$\Delta = \left[32m\left(3 - 4m\right)\right]^2 - 4\left(9 - 16m^2\right)\left(384m - 256m^2\right) = 0$$

$$-4608m\left(3 - 4m\right) = 0$$

$$m = 0 \quad \text{ou} \qquad m = \frac{3}{4}$$

Il faut rejeter $m = \frac{3}{4}$ car c'est une direction asymptotique.

L'équation de la tangente est :

$$t_1 \equiv \quad y = 3$$

Exemple 2

Déterminer les équations des tangentes éventuelles à l'hyperbole
$H \equiv 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0$ parallèles à la droite $d \equiv y = -3x + 6$
Les familles de droites parallèles à la droite *d* sont de la forme :

$$y = -3x + k$$

Parmi ces droites, on cherche celles qui n'ont qu'un point commun avec l'hyperbole.

$$\begin{cases} 9x^2 - 16y^2 - 144 = 0 \\ y = -3x + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(-3x + k\right)^2 - 144 = 0 \\ y = -3x + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x^2 - 16\left(9x^2 - 6kx + k^2\right) - 144 = 0 \\ y = -3x + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} -135x^2 + 96kx - 144 - 16k^2 = 0 \\ y = -3x + k \end{cases}$$

$$\Delta = \left(96k\right)^2 - 4(-135)(-144 - 16k^2) = 0$$

$$576(k^2 - 135) = 0$$

$$k = 3\sqrt{15} \text{ ou } k = -3\sqrt{15}$$

Les équations des tangentes sont :

$$t_1 \equiv \quad y = -3x + 3\sqrt{15}$$
$$t_2 \equiv \quad y = -3x - 3\sqrt{15}$$

Exemple 3

Déterminer les équations des tangentes à la parabole $P \equiv y^2 = 2x$ issues du point $A\left(-1, \frac{1}{2}\right)$.

Par la même méthode que précédemment, on obtient successivement :

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y - \frac{1}{2} = m\left(x - (-1)\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = m(x+1) + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(m(x+1)+\frac{1}{2}\right)^2 = 2x \\ y = m(x+1)+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2x^2 + 2m^2x + m^2 + m(x+1) + \frac{1}{4} = 2x \\ y = m(x+1)+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2x^2 + \left(2m^2 + m - 2\right)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0 \\ y = m(x+1)+\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Delta = \left(2m^2 + m - 2\right)^2 - 4m^2\left(m^2 + m + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$-8m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$-4\left(2m-1\right)\left(m+1\right) = 0$$

$$m = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad m = -1$$

Les équations des tangentes sont :

$$t_1 \equiv \quad y = \frac{1}{2}x + 1$$

et

$$t_2 \equiv \quad y = -x - \frac{1}{2}$$

Exemple 3 bis

Déterminer les équations des tangentes à la parabole $P \equiv y^2 = 2x$ issues du point $A(2,1)$.

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y - 1 = m(x-2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = m(x-2)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(m(x-2)+1\right)^2 = 2x \\ y = m(x-2)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2x^2 - 4m^2x + 4m^2 + 2m(x-2) + 1 = 2x \\ y = m(x-2)+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2x^2 - 2\left(2m^2 - m + 1\right)x + 4m^2 - 4m + 1 = 0 \\ y = m(x-2) + 1 \end{cases}$$

$$\Delta = 4\left(2m^2 - m + 1\right)^2 - 4m^2\left(4m^2 - 4m + 1\right) = 0$$

$$\left[2m^2 - m + 1\right]^2 - \left[m\left(2m - 1\right)\right]^2 = 0$$

$$4m^2 - 2m + 1 = 0$$

$\Delta = 4 - 4.4.1 = -12 \; < \; 0$: il n'y a pas de solution.

Il n'existe pas de tangente à *P* issues du point $A\left(2,1\right)$.

Exemple 3 ter

Déterminer l'équation de la tangente à la parabole $P \equiv y^2 = 2x$, parallèle à la droite *d* d'équation : $d \equiv y = 2x - 5$

Les familles de droites parallèles à la droite *d* sont de la forme :

$$y = 2x + k$$

Parmi ces droites, on cherche celle qui n'a qu'un seul point commun avec la parabole.

$$\begin{cases} y^2 = 2x \\ y = 2x + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2x+k)^2 = 2x \\ y = 2x + k \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x^2 + 2\left(2k - 1\right)x + k^2 = 0 \\ y = 2x + k \end{cases}$$

$$\Delta = 4(2k-1)^2 - 4.4k^2 = 0$$

$$-16k + 4 = 0$$

$$k = \frac{1}{4}$$

L'équation de la tangente est :

$$t \equiv y = 2x + \frac{1}{4}$$

EXERCICES

1. Calcule la coordonnée des points de l'intersection de la droite d d'équation x+y+1=0 avec l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Quelle est la position de la droite par rapport à la conique ?

2. Calcule la coordonnée des points de l'intersection de la droite d d'équation x-y+1=0 avec l'hyperbole d'équation $4x^2-9y^2=36$. Quelle est la position de la droite par rapport à la conique ?

3. Discute suivant les valeurs du paramètre réel m, la position de la droite $d \equiv x+y=m$ et de l'ellipse $4x^2+y^2=1$

4. Pour l'ellipse $9x^2+16y^2=144$, cherche une équation cartésienne de la tangente au(x) point(s)
   a) d'abscisse 2 ou –4
   b) d'ordonnée 3 ou 4

5. Calcule la coordonnée des points de l'intersection de la droite d d'équation x-y+1=0 avec l'hyperbole d'équation $4x^2-9y^2=36$. Quelle est la position de la droite par rapport à la conique ?

6. Cherche une équation cartésienne de la tangente à la parabole d'équation $(y-3)^2=4.(x+2)$ aux points d'abscisses 2. Dessine la conique et les tangentes.

7. Recherche les équations cartésiennes des tangentes à l'ellipse d'équation $4x^2+9y^2=36$ issues du point P (4 ;0).
Si M_1 et M_2 sont les points de contact respectifs des tangentes t_1 et t_2 à l'ellipse, calcule leur coordonnée et une équation de la corde de contact [M_1 ; M_2]

8. Etablis une équation cartésienne des éventuelles tangentes de coefficient angulaire 2 à l'hyperbole $16x^2-25y^2+400=0$

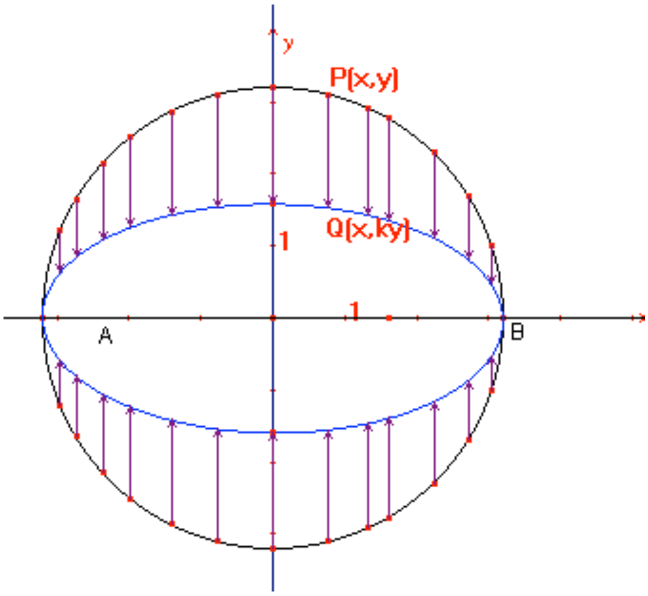
9. Cherche une équation cartésienne des tangentes perpendiculaires à la droite d'équation x-3y=9 à la conique d'équation $x^2+\frac{y^2}{9}=1$. Dessine les.

Chapitre 8: Cercle et ellipse

Théorème
Une ellipse est une transformée d'un cercle par une affinité.

On considère un cercle de centre *O* et de rayon *R*. Son équation s'écrit

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (1)$$



Choisissons un nombre réel positif *k* et faisons correspondre à chaque point *P*(*x, y*) du cercle son image *Q*(*x, ky*).
Cette image se trouve sur la parallèle à *Oy* passant par *P*.
Il s'agit de trouver le lieu géométrique du point *Q* lorsque *P* parcourt le cercle.
A cette fin, effectuons le changement de variable suivant :

$$x' = x \ ; \ y' = ky$$

L'équation (1) devient :

$$x'^2 + \frac{y'^2}{k^2} = R^2$$

ou

$$\frac{x'\leq}{R\leq} + \frac{y'\leq}{k\leq R\leq} = 1$$

Si l'on pose $a = R$ et $b = kR$, cette équation devient

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse dont les axes sont les axes de coordonnées.

Il est évident que la transformation réciproque permet de passer d'une ellipse à un cercle.
La transformation que l'on vient d'utiliser n'est pas une transformation vue précédemment. En effet, elle laisse les abscisses intactes et ne modifie que les ordonnées. (On aurait aussi pu laisser les ordonnées intactes et modifier les abscisses). Une transformation de ce type est une affinité[3].

[3] Une affinité est une transformation du plan qui conserve le parallélisme. Toutes les transformations du plan étudiées précédemment sont donc des affinités. Cependant, celle utilisée dans le cas présent diffère des autres et a été spécialement choisie pour permettre la démonstration de la propriété.

Chapitre 9: Propriétés optiques

Introduction

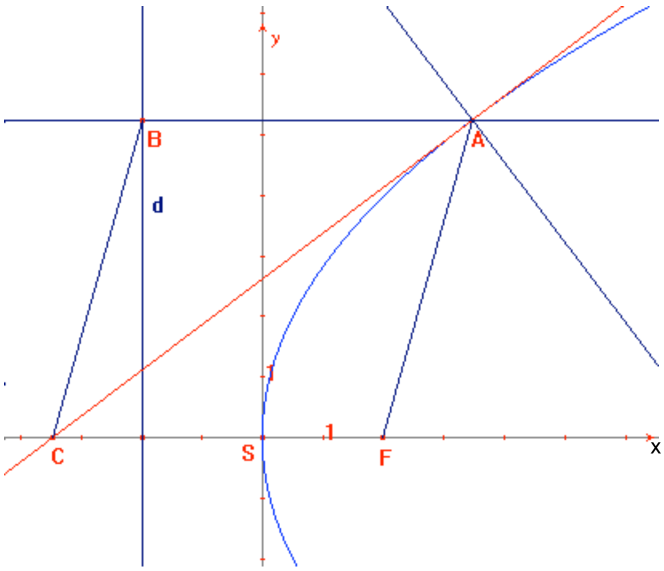
Dans le cours de physique et plus spécialement dans le chapitre sur l'optique, on étudie les miroirs dits « sphériques ». Plusieurs propriétés sont utilisées pour construire l'image d'un objet dans un tel miroir. Cependant, en réalité, les miroirs utilisés, surtout pour les phares des voitures, ont soit la forme d'un paraboloïde de révolution (surface engendrée par une parabole tournant autour de son axe), soit d'un ellipsoïde de révolution (surface engendrée par une ellipse tournant autour d'un de ses axes). L'intérêt de ce genre de phares est double : permettre au conducteur de la voiture de voir le mieux possible et le plus loin possible et éviter d'éblouir les conducteurs roulant en sens inverse.

Définition

La **normale** en un point d'une conique est la perpendiculaire à la tangente à la conique en ce point.

Propriété 1

La tangente et la normale en un point d'une parabole sont les bissectrices des angles formés par la droite qui joint ce point au foyer et la parallèle à l'axe passant par ce point.



H : Parabole (*F, d*).
AB // Sx
AC tangente en *A* à la parabole

T : *BÂC = CÂF*

D : Soit $A(\alpha, \beta)$ un point de la parabole d'équation $y^2 = 2px$. L'équation de la tangente en *A* à cette parabole s'écrit :

$$\beta y = p(x+\alpha)$$

Cette tangente coupe l'axe *Ox* en *C* dont les coordonnées sont $(-\alpha, 0)$, ce qui entraîne :

$$|CF| = \alpha + \frac{p}{2}.$$

D'autre part, si *B* représente l'intersection de la directrice d avec la perpendiculaire abaissée de *A* sur celle-ci, on a

$$|BA| = \frac{p}{2} + \alpha$$

Dès lors, les segments [*CF*] et [*BA*] sont égaux et parallèles. Le quadrilatère *BAFC* est donc un parallélogramme. Le côté [*FA*] de ce parallélogramme mesure

$$|FA| = \sqrt{(\frac{p}{2} - \alpha)^2 + \beta^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} - p\alpha + \alpha^2 + \beta^2} = \sqrt{\frac{p^2}{4} + p\alpha + \alpha^2} = \sqrt{\left(\frac{p}{2} + \alpha\right)^2} = \frac{p}{2} + \alpha$$

Le parallélogramme *BAFC* est donc un losange et sa diagonale [*AC*] est bissectrice de l'angle *BÂF.*

D'où : *BÂC = CÂF*

c.q.f.d.

Conclusion : Tout rayon lumineux parallèle à l'axe d'un miroir parabolique se réfléchit en passant par le foyer et réciproquement.

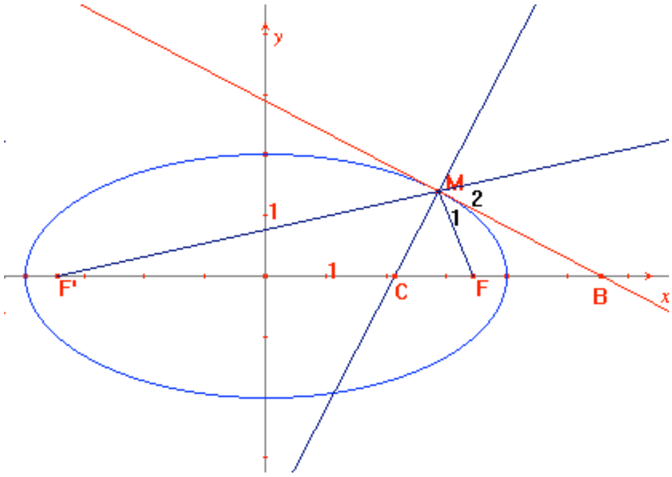
Propriété 2

La tangente et la normale en un point d'une ellipse sont les bissectrices des angles formés par les droites qui joignent ce point aux foyers.

H : Ellipse (*F, F', 2a*).
MB tangente en *M* à l'ellipse

T : $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$

D : Considérons un point *M*(α, β) situé sur l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Construisons la tangente et la normale à l'ellipse en *M*.
Soient *B* et *C* les points d'intersection respectifs de la tangente et de la normale avec l'axe *Ox.*



Nous savons que l'équation de la tangente en *M* s'écrit :

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}=1.$$

Le point *M*(α, β) appartient à l'ellipse, on a alors :

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1.$$

Nous savons aussi que $a^2-c^2=b^2$

- Recherchons une équation de la normale en *M :*

  Le coefficient angulaire de la tangente en *M* est $-\frac{\alpha b^2}{\beta a^2}$ et celui de la normale $\frac{\beta a^2}{\alpha b^2}$(en supposant que α et β sont différents de 0).

  L'équation de la normale est donc : $y-\beta=\frac{\beta a^2}{\alpha b^2}(x-\alpha)$

  ou $\frac{\beta x}{b^2}-\frac{\alpha y}{a^2}=\alpha\beta\frac{c^2}{a^2b^2}$

- Les coordonnées du point *C* sont donc $\left(\alpha\frac{c^2}{a^2},0\right)$
- Les coordonnées du point *B* sont $\left(\frac{a^2}{\alpha},0\right)$
- Les coordonnées de *F* et *F'* sont respectivement (*c*, 0) et (–*c*, 0).

Calculons maintenant les longueurs des segments [*F'C*], [*FC*], [*F'B*], [*FB*], [*F'M*] et [*FM*].

$$\left|F'C\right| = c + \alpha\frac{c\leq}{a\leq} = \frac{c}{a\leq}(a\leq + \alpha c)$$

$$\left|FC\right| = c - \alpha\frac{c\leq}{a\leq} = \frac{c}{a\leq}(a\leq - \alpha c)$$

$$\left|F'B\right| = c + \frac{a^2}{\alpha} = \frac{a^2 + \alpha c}{\alpha}$$

$$\left|FB\right| = \frac{a^2}{\alpha} - c = \frac{a^2 - \alpha c}{\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\left|F'M\right|^2 &= (-c-\alpha)^2 + \beta^2 \\
&= c^2 + 2\alpha c + \alpha^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - \alpha^2) \\
&= c^2 + 2\alpha c + \alpha^2 + b^2 - \frac{b^2}{a^2}\alpha^2 \\
&= c^2 + 2\alpha c + \frac{\alpha^2}{a^2}(a^2 - b^2) + a^2 - c^2 \\
&= 2\alpha c + \frac{\alpha^2}{a^2}c^2 + a^2 \\
&= \left(a + \frac{\alpha c}{a}\right)^2
\end{aligned}$$

et donc $$\left|F'M\right| = a + \frac{\alpha c}{a}$$

Par un calcul analogue, on obtient $\left|FM\right| = a - \dfrac{\alpha c}{a}$

Il est maintenant facile de voir que : $\dfrac{\left|F'M\right|}{\left|FM\right|} = \dfrac{a^2 + \alpha c}{a^2 - \alpha c} = \dfrac{\left|F'C\right|}{\left|FC\right|} = \dfrac{\left|F'B\right|}{\left|FB\right|}$

En application de la réciproque du théorème de la bissectrice[4], nous pouvons affirmer que

$$\hat{M}_1 = \hat{M}_2$$

c.q.f.d.

Conclusion : Tout rayon lumineux passant par un des foyers d'un miroir elliptique se réfléchit en passant par l'autre foyer.

Propriété 3

La tangente et la normale en un point d'une hyperbole sont les bissectrices des angles formés par les droites qui joignent ce point aux foyers.

La démonstration est analogue à la précédente.

---

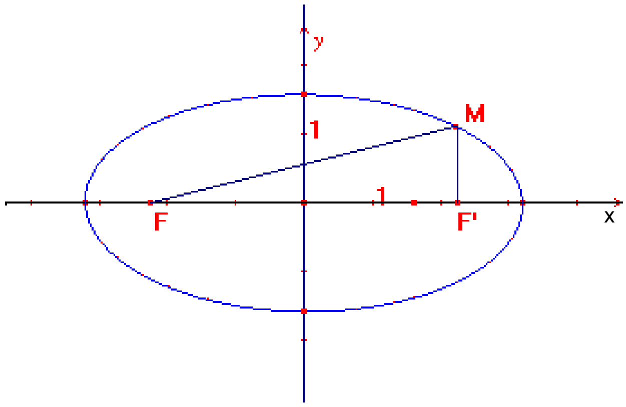
[4] La bissectrice intérieure d'un angle d'un triangle coupe le côté opposé en segments homologues additifs proportionnels aux côtés adjacents et réciproquement, si une droite passant par le sommet d'un triangle coupe le côté opposé en segments homologues additifs proportionnels aux côtés adjacents, cette droite est une bissectrice intérieure du triangle.
La bissectrice extérieure d'un angle d'un triangle coupe le côté opposé en segments homologues soustractifs proportionnels aux côtés adjacents et réciproquement, si une droite passant par le sommet d'un triangle coupe le côté opposé en segments homologues soustractifs proportionnels aux côtés adjacents, cette droite est une bissectrice extérieure du triangle.

Chapitre 10: Quelques méthodes de construction des coniques

Construction de l'ellipse

1. Méthode du jardinier pour la construction de l'ellipse

Soient *F* et *F'* les deux foyers de l'ellipse. On prend une ficelle de longueur 2*a*. On la punaise en *F* et *F'*. Il suffit alors de prendre un crayon et de tracer la courbe en maintenant tendue la ficelle.

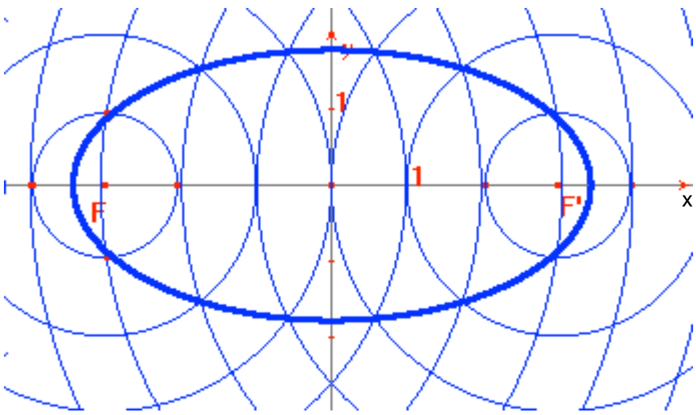


2. Construction de l'ellipse par une affinité

Nous avons vu au chapitre 8 que l'ellipse est la transformée d'un cercle par une affinité. Il suffit donc de tracer un cercle de rayon a et de le transformer par une affinité de rapport *k* parallèlement à un des deux axes.

3. Méthode des cercles concentriques

Pour construire une ellipse d'axes *2a* et *2b,* plaçons ses foyers *F* et *F'* sur une droite.
Traçons un certain nombre de cercles concentriques C, C', C'', … de centre *F* et de rayons *R, R', R''*, …
Traçons ensuite d'autres cercles C_1, C_1', C_1'', … de centre *F'* et de rayons *2a – R, 2a – R', 2a – R''*, …
Les intersections des cercles C et C_1, C' et C_1', C'' et C_1'', … sont évidemment des points de l'ellipse.



4. Méthode du compas elliptique

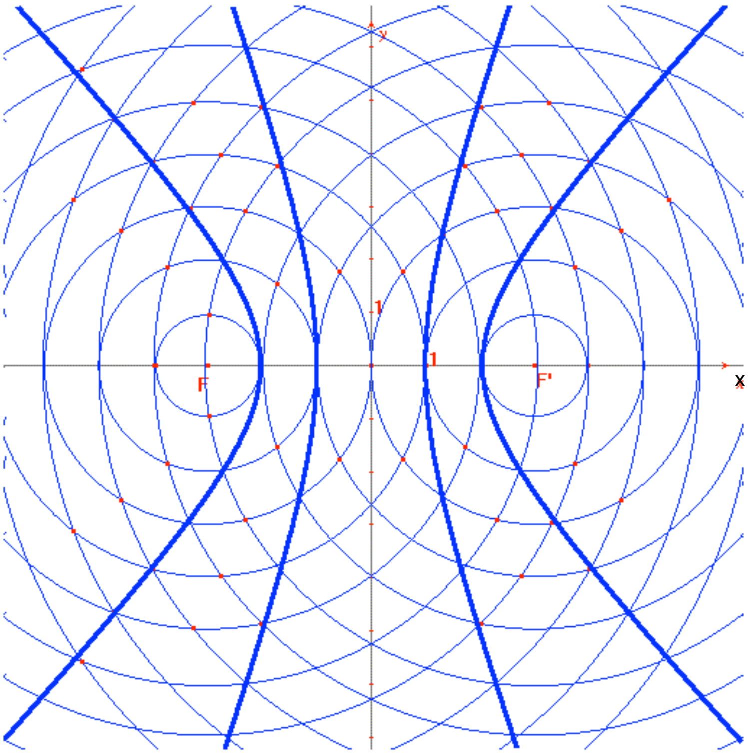
En quatrième année, nous avons vu que le lieu géométrique des milieux d'une échelle de longueur donnée et glissant sur le sol et le mur (perpendiculaires entre eux) est un quart de cercle centré à l'origine (point d'intersection du mur et du sol).
Nous reprendrons ce lieu dans le chapitre y consacré en remplaçant le milieu de l'échelle par un échelon bien déterminé, par exemple celui sur lequel se trouve le travailleur, et verrons que le lieu devient une ellipse. Ceci permet d'élaborer une nouvelle méthode de construction de l'ellipse.

Il s'agit de construire une ellipse dont les axes focaux mesurent respectivement 2*a* et 2*b*. Pour ce faire, traçons deux axes perpendiculaires *Ox* et *Oy* et considérons un segment [*AB*] de longueur *a* + *b* qui s'appuiera sur les deux axes et un point *M* sur ce segment tel que $|AM| = b$. Il en résulte que $|MB| = a$. Lorsque *A* décrit *Ox, B* décrit *Oy* et *M* décrit un quart de l'ellipse cherchée. La démonstration détaillée en est faite dans le chapitre sur les lieux géométriques.

Construction de l'hyperbole

1. <u>Méthode des cercles concentriques</u>

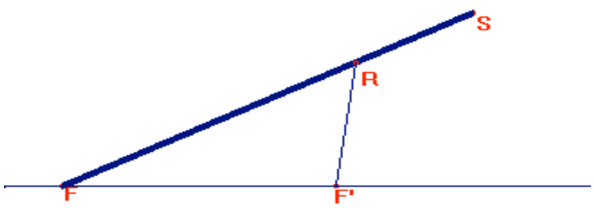
Pour construire une hyperbole dont le grand axe vaut *2a,* plaçons ses foyers *F* et *F'* sur une droite.
Traçons un certain nombre de cercles concentriques C, C', C'', … de centre *F* et de rayons *R, R', R''*, …
Traçons ensuite d'autres cercles C_1, C_1', C_1'', … de centre *F'* et de rayons *2a* + *R,* *2a* + *R', 2a* + *R'',* …
Les intersections des cercles C et C_1, C' et C_1', C'' et C_1'', … sont évidemment des points de l'hyperbole.



2. <u>Construction du jardinier</u>

Au moyen d'une latte de bois de longueur *x* et d'une ficelle de longueur *y* telles que $x - y = 2a$, il est possible de tracer une hyperbole :

- on fixe la latte en l'un des foyers, *F* par exemple ;
- on attache la ficelle à l'autre extrémité de la latte d'une part et à l'autre foyer d'autre part ;
- on tend la ficelle de telle manière qu'une partie de celle-ci reste collée en permanence à la latte.



Sur la figure ci-dessus, *FS* représente la latte de bois, *F'RS* la ficelle. Le crayon ou le plantoir se trouve en *R*. Il est évident que lorsque la latte bouge (tout en restant fixée en *F*), le point *R* restant sur la latte décrira une branche d'hyperbole.

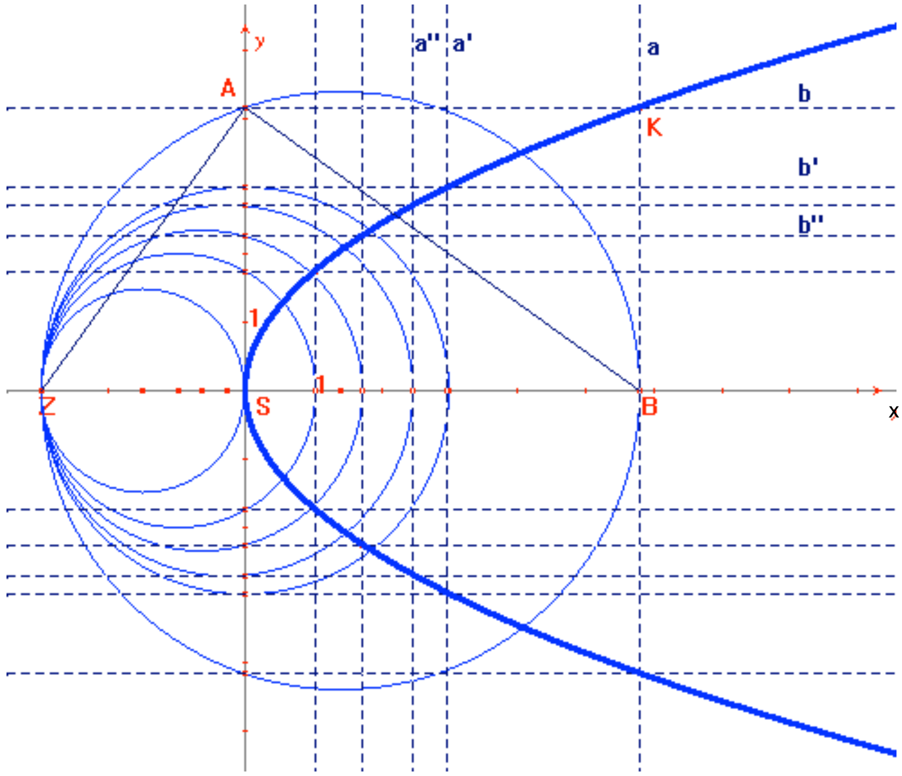
Pour obtenir l'autre branche, il suffit d'attacher la latte en *F'* et la ficelle en *F* et de procéder de la même manière.

Construction de la parabole

1. Méthode des moyennes proportionnelles

Pour dessiner la parabole d'équation $y^2 = 2px$

- on fixe sur l'axe focal, un point *Z* tel que sa distance au sommet soit égale à *2p* (le sommet doit se trouver entre le foyer et ce point *Z*) ;
- on dessine un certain nombre de cercles C, C', C'' … dont les centres sont situés sur l'axe focal (du même côté de *Z* que le foyer) et passant par *Z* ;
- par la seconde intersection de ces cercles avec l'axe focal, on trace des perpendiculaires *a, a', a''*, … à celui-ci ;
- par l'intersection de ces cercles avec la tangente au sommet de la parabole, on trace des parallèles *b, b', b''* … à l'axe focal ;

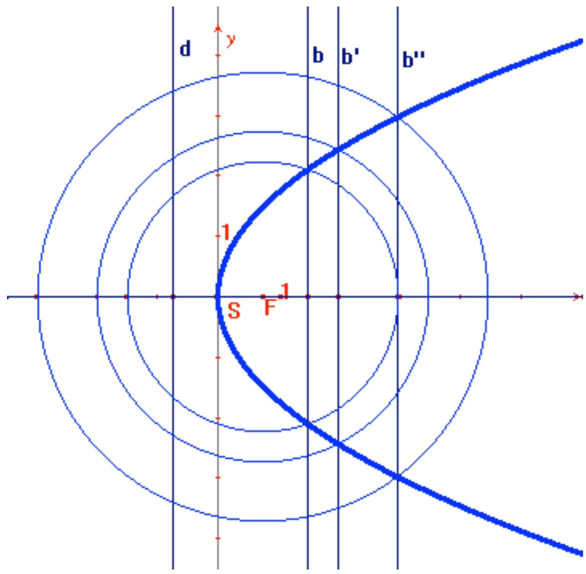


- les intersections *K* de *a* et *b*, *a'* et *b'*, *a''* et *b''*, … sont des points de la parabole[5].

2. Méthode basée sur la définition de la parabole

Une parabole est définie par son foyer et sa directrice.
Tout point de la parabole est équidistant du foyer *F* et de la directrice *d.*
Il en résulte le tracé suivant :

- traçons une parallèle *b* à la directrice distante de la longueur δ de celle-ci ;
- traçons un cercle de centre *F* et de rayon δ ;
- les points d'intersection de ce cercle et de *a* sont des points de la parabole.



[5] On fait appel au théorème suivant : Dans un triangle rectangle, la hauteur relative à l'hypoténuse est moyenne proportionnelle entre les segments qu'elle détermine sur l'hypoténuse. Le triangle *ZAB* est rectangle en *A*. Sa hauteur *AS* relative à l'hypoténuse est l'ordonnée *y* du point *K*. Les segments déterminés par *AS* sur l'hypoténuse mesurent respectivement *2p* et *x*. Il en résulte donc que $y^2 = 2px$.

3. Méthode du jardinier

Il est possible de construire une parabole au moyen d'une équerre, d'une latte et d'une ficelle par une méthode semblable à celle décrite pour l'hyperbole.

Note

Il est évidemment possible de construire les coniques en calculant algébriquement les coordonnées d'un certain nombre de ses points.

Construction de la tangente à une ellipse en un de ses points

1re méthode

Soit à construire la tangente en un point *L* de l'ellipse.

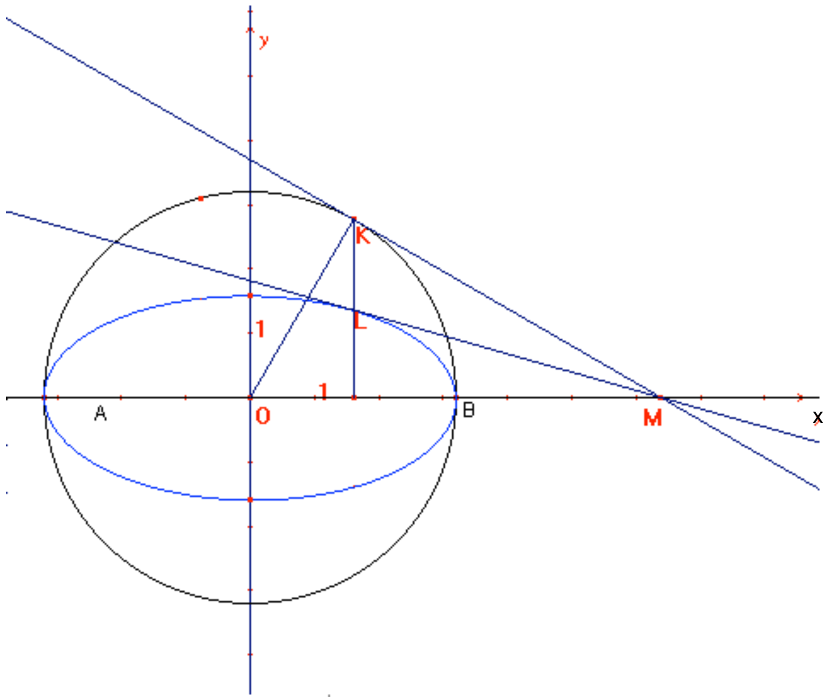
Nous avons vu que ce point est l'image par une affinité d'un point *K* du cercle construit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

La tangente au cercle en *K* est perpendiculaire au rayon *OK* aboutissant au point *K* de contact.

L'image de cette tangente par l'affinité précitée sera la tangente cherchée.

Il suffit donc :

- de construire le cercle qui a comme diamètre le grand axe ;
- de tracer par *L* la parallèle au petit axe de l'ellipse, qui coupe le cercle précédent en *K* ;
- de tracer *OK* ;
- de construire la perpendiculaire à *OK* en *K* ;
- de déterminer l'intersection *M* de cette perpendiculaire avec le grand axe ;
- de tracer *ML* qui est la tangente cherchée.

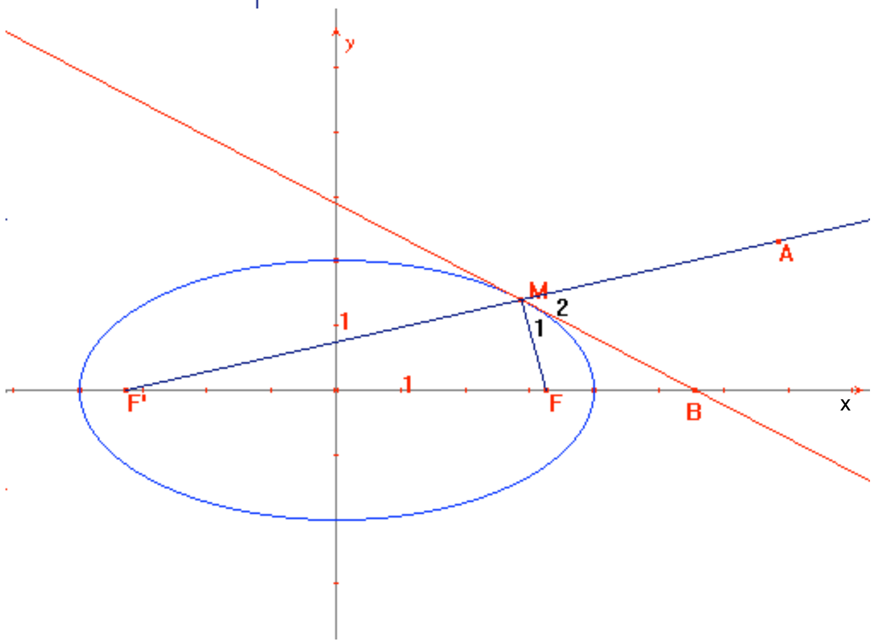


2e méthode

Cette méthode est basée sur la propriété des tangentes à une ellipse vue au chapitre précédent.

Étant donnée une ellipse rapportée à ses axes, pour trouver la tangente en un de ses points *M*, il suffit

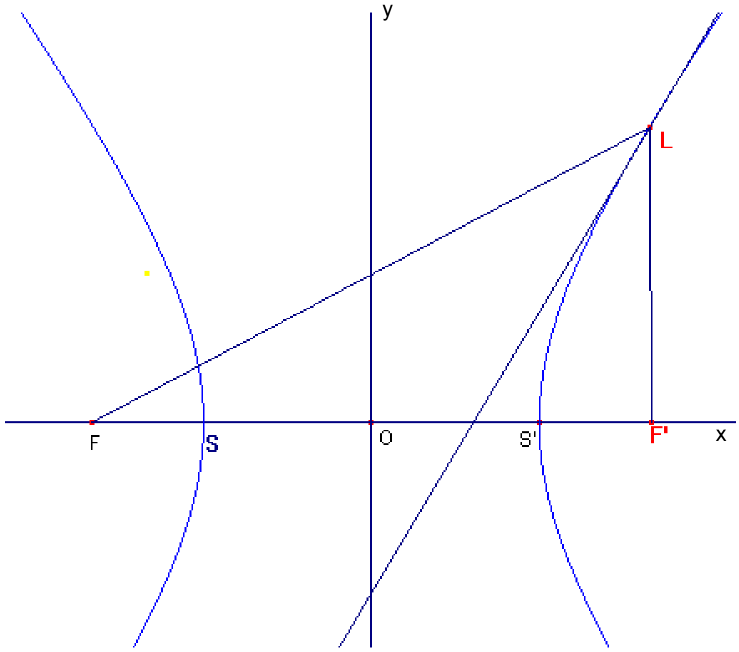
- de construire ses foyers *F* et *F'* ;
- de tracer *FM* et *F'M* ;
- de construire la bissectrice extérieure de l'angle $F'\hat{M}F$.



Construction de la tangente à une hyperbole en un de ses points

Cette méthode est basée sur la propriété des tangentes à une hyperbole vue au chapitre précédent.
Etant donnée une hyperbole rapportée à ses axes, pour trouver la tangente en un de ses points *L*, il suffit

- de construire ses foyers *F* et *F'* ;
- de tracer *FL* et *F'L* ;
- de construire la bissectrice intérieure de l'angle $F'\hat{L}F$.

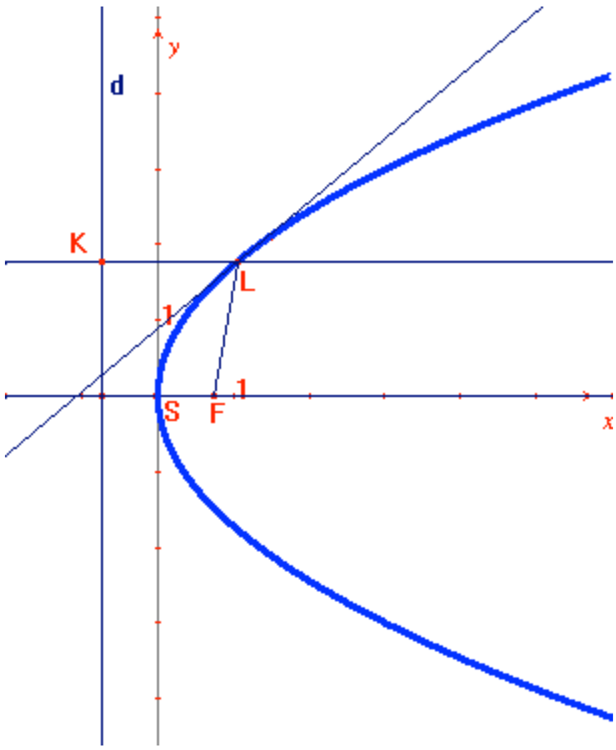


Construction de la tangente à une parabole en un de ses points

Cette méthode est basée sur la propriété des tangentes à une parabole vue au chapitre précédent.

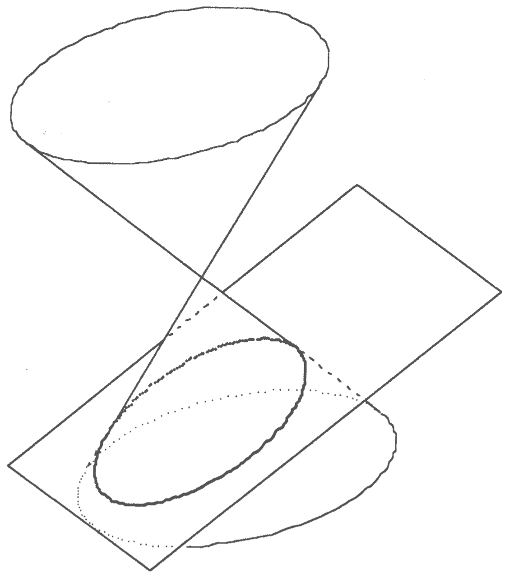
Étant donnée une parabole rapportée à son axe et à la tangente à son sommet, pour trouver la tangente en un de ses points *L*, il suffit :

- de construire son foyer *F* et sa directrice *d* ;
- de tracer *FL* et d'abaisser la perpendiculaire *p* de *L* sur *d* ;
- d'appeler *K* l'intersection de cette perpendiculaire avec *d* ;
- de construire la bissectrice intérieure de l'angle $K\hat{L}F$.

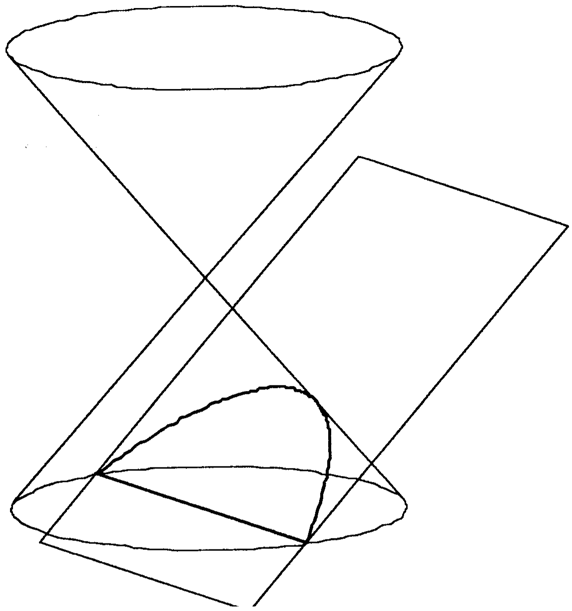


Chapitre 11: Coniques et cône

L'intersection d'un cône droit et d'un plan (qui ne passe pas par le sommet du cône) est

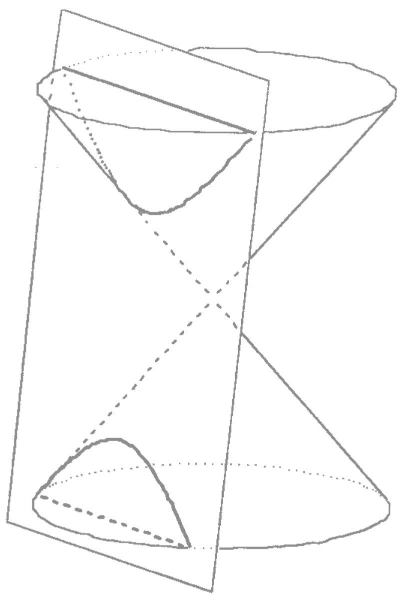


- une **ellipse** si le plan n'est parallèle à aucune génératrice



- une **parabole** si le plan est parallèle à une et une seule génératrice[6] ;
- une **hyperbole** si le plan est parallèle à deux génératrices.

La réciproque de ce théorème est évidente.



Les figures ci-contre montrent clairement qu'il en est bien ainsi. Expérimentalement, ceci peut être vérifié par l'ombre projetée sur un plan par le cône de lumière émis par une lampe.

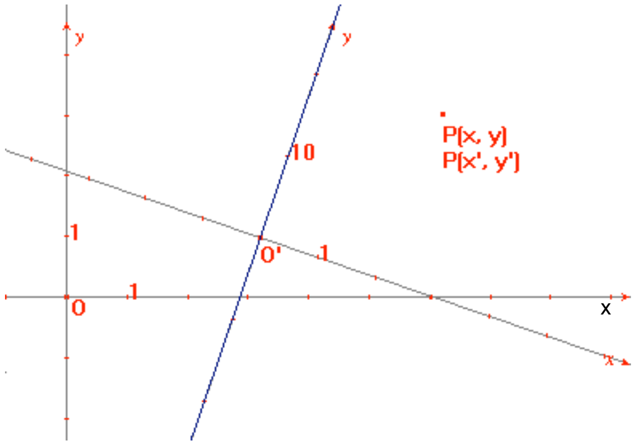
Ce théorème a été établi par des mathématiciens belges (Dandelin et Quetelet) et est connu sous le nom de théorème belge. Plusieurs démonstrations existent. Elles consistent à travailler dans des plans différents bien choisis. Le lecteur intéressé peut consulter l'un ou l'autre traité de géométrie analytique rédigé pour l'enseignement secondaire.

Note
Si le plan passe par le sommet du cône, l'intersection est soit un point, une droite ou un couple de deux droites, c'est-à-dire une conique dégénérée.

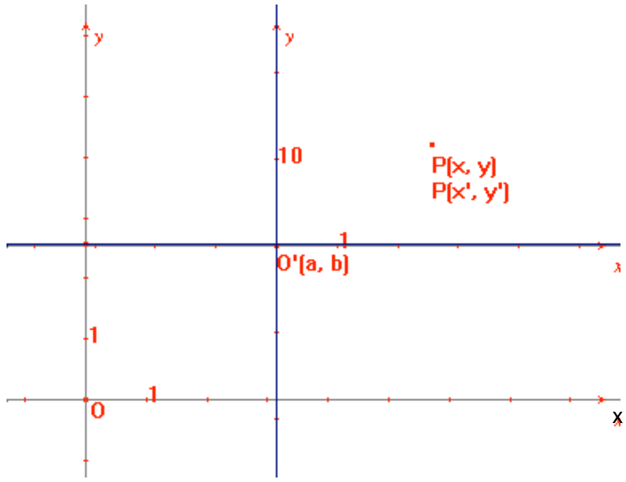
---

[6] Une génératrice d'un cône est une droite qui s'appuie sur son sommet et sur un cercle de ce cône.

Chapitre 12: Changements de repère



Nous continuons à travailler dans un repère orthonormé et désirons voir ce que devient l'équation d'une courbe et plus particulièrement d'une conique lorsque nous changeons de repère, c'est-à-dire lorsque nous décidons de remplacer les axes *Ox* et *Oy* par deux autres *O'x'* et *O'y'* (formant également un repère orthonormé).
Tout point *P* du plan est repéré dans le repère initial (*Oxy*) par deux coordonnées *x* et *y* et dans le nouveau repère (*O'x'y'*) par deux autres coordonnées *x'* et *y'*. Nous cherchons à exprimer *x* et *y* en fonction de *x'* et de *y'.*



Le passage du repère initial au nouveau repère peut être décomposé en deux phases :

- **une translation de vecteur** $\overrightarrow{OO'}$.

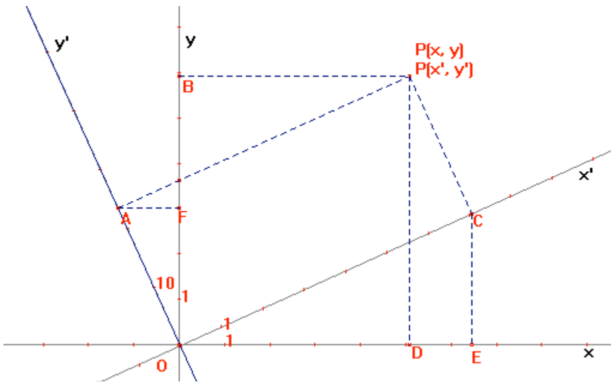
Si les coordonnées de *O'* dans le système initial sont (*a, b*), cette translation est caractérisée par

$$\begin{cases} x = x' + a \\ y = y' + b \end{cases}$$

- **une rotation d'un certain angle** que nous appellerons θ de l'axe *Ox,* l'axe *Oy* tournant en même temps que l'axe *Ox* et du même angle.

DÔC étant l'angle θ , on a :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CP}$$



et par projection sur l'axe Ox initial :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{ED}$$

ce qui entraîne

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

De même,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

et par projection sur l'axe Oy initial :

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{FB}$$

ce qui entraîne

$$y = y'\cos\theta + x'\sin\theta = x'\sin\theta + y'\cos\theta$$

Les formules de changement d'axes par rotation sont donc

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Les formules qui permettent de passer du système *Oxy* au système *O'x'y'* s'écrivent

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = b + x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Nous allons voir comment s'appliquent ces formules dans quelques cas particuliers

1. L'équation $mx + ny + p = 0$ d'une **droite** devient :

$$m(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta) + n(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta) + p = 0$$

ou

$$(m\cos\theta + n\sin\theta)x' + (n\cos\theta - m\sin\theta)y' + (ma + nb + p) = 0$$

et est donc de la même forme que l'équation de départ.

2. L'équation $x^2 + y^2 = R^2$ du **cercle centré à l'origine et de rayon *R*** devient

$$(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + (b + x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = R^2$$

ou

$$(\cos^2\theta + \sin^2\theta)x'^2 + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)y'^2 + 2(a\cos\theta + b\sin\theta)x'$$
$$+ 2(-a\sin\theta + b\cos\theta)y' + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$$

ou

$$x'^2 + y'^2 + 2(a\cos\theta + b\sin\theta)x' + 2(-a\sin\theta + b\cos\theta)y' + (a^2 + b^2 - R^2) = 0$$

Ce résultat était à prévoir puisque, dans le nouveau système d'axes, le cercle n'est plus centré à l'origine.

3. L'équation $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$ du **cercle de centre *C*(*α*, *β*) et de rayon *R*** devient

$$\left[(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta) - \alpha\right]^2 + \left[(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta) - \beta\right]^2 = R^2$$

ou

$$x'^2 + y'^2 + 2(a\cos\theta + b\sin\theta - \alpha\cos\theta - \beta\sin\theta)x' + 2(-a\sin\theta + b\cos\theta + \alpha\sin\theta - \beta\cos\theta)y'$$
$$+ (a^2 + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha a - 2\beta b - R^2) = 0$$

Cette équation a la même forme que celle de départ, ce qui était à prévoir.

4. L'équation $\dfrac{x^2}{A^2} + \dfrac{y^2}{B^2} = 1$ d'une **ellipse rapportée à ses axes** devient

$$\frac{(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2}{A^2} + \frac{(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2}{B^2} = 1$$

ou

$$B^2(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + A^2(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = A^2B^2$$

ou :

$$(B^2\cos^2\theta + A^2\sin^2\theta)x'^2 + 2(A^2 - B^2)\cos\theta.\sin\theta x'y' + (A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta)y'^2$$
$$+ 2(B^2a\cos\theta + A^2b\sin\theta)x' + 2(A^2b\cos\theta - B^2a\sin\theta)y' + (B^2a^2 + A^2b^2 - A^2B^2) = 0$$

Cette équation est de la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, ce qui était à prévoir puisque l'ellipse n'est plus rapportée à ses axes.

5. L'équation $\frac{x^2}{A^2} - \frac{y^2}{B^2} = 1$ d'une **hyperbole rapportée à ses axes** devient

$$\frac{(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2}{A^2} - \frac{(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2}{B^2} = 1$$

ou
$$B^2(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 - A^2(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = A^2B^2$$

ou

$$(B^2\cos^2\theta - A^2\sin^2\theta)x'^2 - 2(A^2 + B^2)\cos\theta.\sin\theta x'y' + (-A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta)y'^2$$
$$+ 2(B^2a\cos\theta - A^2b\sin\theta)x' - 2(A^2b\cos\theta + B^2a\sin\theta)y' + (B^2a^2 - A^2b^2 - A^2B^2) = 0$$

Cette équation est de la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, ce qui était à prévoir puisque l'hyperbole n'est plus rapportée à ses axes.

6. L'équation $y^2 = 2px$ d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente à son sommet devient

$$(b + x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = 2p(a + x'\cos\theta - y'\sin\theta)$$

ou

$$b^2 + x'^2\sin^2\theta + y'^2\cos^2\theta + 2bx'\sin\theta + 2by'\cos\theta + 2x'y'\sin\theta.\cos\theta = 2pa + 2px'\cos\theta - 2py'\sin\theta$$

ou

$$x'^2\sin^2\theta + y'^2\cos^2\theta + 2x'y'\sin\theta.\cos\theta + 2(b\sin\theta - p\cos\theta)x' + 2(b\cos\theta + p\sin\theta)y' + (b^2 - 2pa) = 0$$

Cette équation est de la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$, ce qui était à prévoir puisque la parabole n'est plus rapportée à son axe et à la tangente à son sommet.

Notes

- On peut démontrer, mais nous ne le ferons pas ici, que toute équation de la forme $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ représente une conique, donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole. On peut déterminer la nature de cette conique en calculant un invariant : $\delta = B^2 - AC$[7]. La conique est
  - ✓ une ellipse si et seulement si $\delta < 0$,
  - ✓ une hyperbole si et seulement si $\delta > 0$
  - ✓ une parabole si et seulement si $\delta = 0$.

Les équations déterminées aux points 4, 5 et 6 ci-dessus ont respectivement pour invariant δ : $-A^2B^2$, A^2B^2, 0.

- **Le changement de repère peut aussi se faire au moyen d'une matrice, appelée matrice de transformation. Elle s'écrit**

Les équations définissant le changement de repère peuvent s'écrire au moyen du calcul matriciel de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Il faut cependant noter que l'utilisation du calcul matriciel ne simplifie, ni ne complique les calculs.

[7] Certains auteurs définissent cet invariant par la formule *AC - B²*. Dans ce cas, toutes les valeurs obtenues sont les opposées de celles qui figurent dans la suite de ces notes. Le problème se posera surtout lors d'examens : il faudra toujours bien préciser la formule qui définit cet invariant.

Chapitre 13: Réduction d'une équation du deuxième degré à deux variables

Étant donnée une conique donnée par une équation générale du second degré $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ (la conique n'est donc pas nécessairement rapportée à ses axes ou à son axe et la tangente à son sommet), il y a lieu de déterminer un changement de repère tel que l'équation ci-dessus devienne une des équations canoniques connues, c'est-à-dire tel que la conique soit rapportée à ses axes ou à son axe et à la tangente à son sommet.
Il y a lieu de commencer par calculer l'invariant δ afin de déterminer la nature de la conique, puis à utiliser la méthode des coefficients indéterminés. Nous allons examiner les choses de plus près au moyen de trois exemples.

Réduire l'équation des coniques suivantes :

Exemple 1

$$6x^2 - 2xy + 6y^2 + 12x - 8y + 4 = 0$$

$$\delta = 1 - 6.6 = -35$$

Il s'agit donc d'une ellipse. Il faut donc trouver une équation de la forme $\frac{x\leq}{a\leq}+\frac{y\leq}{b\leq}=1$.
Nous allons procéder en deux étapes :

<u>1re étape</u>
Il faut déterminer une rotation telle que le nouveau repère soit formé d'axes parallèles aux axes de la conique. Comme on l'a vu, cette rotation est caractérisée par les équations

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

Elle doit permettre d'annuler le coefficient du terme en *x'y'.*
On a

$$\begin{aligned}&6(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 - 2(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + 6(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 \\ &+12(x'\cos\theta - y'\sin\theta) - 8(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + 4 = 0\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}&x'^2(6 - 2\cos\theta.\sin\theta) + 2x'y'(\sin^2\theta - \cos^2\theta) + y'^2(6 + 2\cos\theta.\sin\theta) \\ &+x'(12\cos\theta - 8\sin\theta) + y'(-12\sin\theta - 8\cos\theta) + 4 = 0\end{aligned}$$

Pour que le coefficient du terme en x'y' soit nul, il faut que $\sin^2\theta - \cos^2\theta = 0$, ce qui entraîne $\theta = 45°$ [1] et

$$\sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'équation précédente s'écrit dès lors

$$5x'^2 + 7y'^2 + 2\sqrt{2}x' - 10\sqrt{2}y' + 4 = 0$$

---

[1] L'équation trigonométrique qui précède admet évidemment d'autres solutions, mais une seule, la plus simple, suffit.

<u>2^e étape</u>

Il faut déterminer une translation qui amène l'origine du repère au centre de la conique (point d'intersection des axes de la conique). Comme on l'a vu, une telle translation est caractérisée par les équations $\begin{cases} x' = a + x'' \\ y' = b + y'' \end{cases}$

Elle doit permettre d'annuler les coefficients des termes en *x''* et en *y''*.

On a

$$5(a+x'')^2 + 7(b+y'')^2 + 2\sqrt{2}(a+x'') - 10\sqrt{2}(b+y'') + 4 = 0$$

Le coefficient du terme en *x''* est $10a + 2\sqrt{2}$. Il s'annule pour $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Le coefficient du terme en *y''* est $14b - 10\sqrt{2}$. Il s'annule pour $b = \dfrac{5\sqrt{2}}{7}$

L'équation s'écrit maintenant

$$5\left(-\frac{\sqrt{2}}{5} + x''\right)^2 + 7\left(\frac{5\sqrt{2}}{7} + y''\right)^2 + 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{5} + x''\right) - 10\sqrt{2}\left(\frac{5\sqrt{2}}{7} + y''\right) + 4 = 0$$

ou

$$5x''^2 + 7y''^2 - \frac{124}{35} = 0$$

ou

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\dfrac{124}{175}}\right)^2} + \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\dfrac{124}{245}}\right)^2} = 1$$

Exemple 2

$$x^2 - 2\sqrt{3}xy - y^2 + 12x - 8y + 4 = 0$$
$$\delta = 3 - 1.(-1) = 4$$

Il s'agit donc d'une hyperbole. Il faut donc trouver une équation de la forme $\frac{x\leq}{a\leq} - \frac{y\leq}{b\leq} = 1$.

Nous allons procéder en deux étapes.

1re étape

Il faut déterminer une rotation telle que le nouveau repère soit formé d'axes parallèles aux axes de la conique. Comme on l'a vu, cette rotation est caractérisée par les équations $\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$

Elle doit permettre d'annuler le coefficient du terme en *x'y'*.

On a

$$(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 - 2\sqrt{3}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) - (x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2$$
$$+12(x'\cos\theta - y'\sin\theta) - 8(x'\sin\theta + y'\cos\theta) + 4 = 0$$

ou

$$x'^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\sqrt{3}\cos\theta.\sin\theta) + x'y'(-4\cos\theta.\sin\theta + 2\sqrt{3}\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\cos^2\theta)$$
$$+y'^2(-\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sqrt{3}\cos\theta.\sin\theta) + x'(12\cos\theta - 8\sin\theta) + y'(-12\sin\theta - 8\cos\theta) + 4 = 0$$

Pour que le coefficient du terme en *x'y'* soit nul, il faut que

$$-4\cos\theta.\sin\theta + 2\sqrt{3}\sin^2\theta - 2\sqrt{3}\cos^2\theta = 0$$

ou

$$\sqrt{3}tg^2\theta - 2tg\theta - \sqrt{3} = 0$$

ou

$$\mathrm{tg}\theta = \sqrt{3}$$

et enfin

$$\theta = 60°$$ ([1])

Dès lors

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \cos\theta = \frac{1}{2}$$

L'équation précédente s'écrit dès lors

$$x'^2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4} - 2\sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{1}{2}\right) + y'^2\left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 2\sqrt{3}\,\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + x'(6 - 4\sqrt{3}) + y'(-6\sqrt{3} - 4) + 4 = 0$$

ou

$$-2x'^2 + 2y'^2 + x'\left(6 - 4\sqrt{3}\right) + y'\left(-6\sqrt{3} - 4\right) + 4 = 0$$

[1] L'équation trigonométrique qui précède admet évidemment d'autres solutions, mais une seule, la plus simple, suffit et nous choisissons celle qui donne à θ une valeur du premier quadrant.

<u>2^e étape</u>

Il faut déterminer une translation qui amène l'origine du repère au centre de la conique (point d'intersection des axes de la conique). Comme on l'a vu, une telle translation est caractérisée par les équations $\begin{cases} x' = a + x'' \\ y' = b + y'' \end{cases}$

Elle doit permettre d'annuler les coefficients des termes en *x''* et en *y''*.

On a

$$-2(a+x'')^2 + 2(b+y'')^2 + (a+x'')(6-4\sqrt{3}) + (b+y'')(-6\sqrt{3}-4) + 4 = 0$$

Le coefficient du terme en *x''* est

$$-4a + 6 - 4\sqrt{3}$$

Pour qu'il soit nul, il faut que

$$a = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$$

Le coefficient du terme en *y''* est

$$4b - 6\sqrt{3} - 4$$

Pour qu'il soit nul, il faut que

$$b = 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

L'équation s'écrit maintenant

$$-2\left(\frac{3}{2} - \sqrt{3} + x''\right)^2 + 2\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + y''\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \sqrt{3} + x''\right)\left(6 - 4\sqrt{3}\right) + \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + y''\right)\left(-6\sqrt{3} - 4\right) + 4 = 0$$

ou

$$-2x''^2 + 2y''^2 = -1 - 12\sqrt{3}$$

ou

$$\frac{x''^2}{\left(\sqrt{\frac{1+12\sqrt{3}}{2}}\right)^2} - \frac{y''^2}{\left(\sqrt{\frac{1+12\sqrt{3}}{2}}\right)} = 1$$

Puisque les coefficients *A* et *B* sont égaux, l'hyperbole est équilatère.

Chapitre 14: Les coordonnées polaires

Introduction

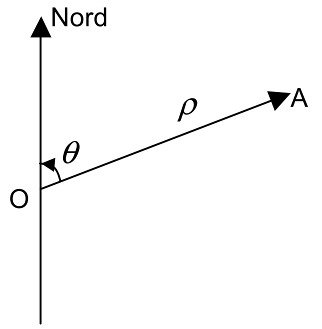
Jusqu'à présent, nous avons toujours représenté toutes les fonctions dans un système d'axes orthonormés. Cependant, dans la vie courante, il est habituel de se servir d'autres moyens de représentation.
Par exemple, l'utilisation d'une boussole nous montre une autre façon de se repérer.
On fixe :

- (le lieu où l'on se trouve),
- un axe (dirigé vers le nord magnétique).

Pour se repérer, on donne :

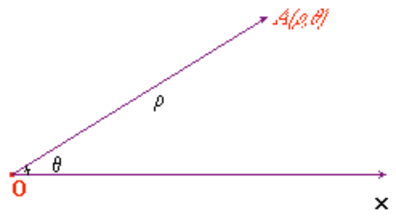
- la direction que l'on doit suivre au moyen de l'angle θ formé par celle-ci et par l'axe (en précisant est ou ouest),
- la distance ρ à parcourir.

Ce faisant, le point à atteindre est parfaitement fixé.



Définition des coordonnées polaires

Choisissons un point *O* comme origine (**pôle**) des coordonnées polaires et une demi-droite [*Ox* comme **axe polaire**. Les angles sont mesurés dans le sens trigonométrique au départ de l'axe polaire et les distances sont mesurées à partir de *O* sur des demi-droites issues de ce point.



Cette définition rappelle clairement la situation rencontrée lors de la représentation trigonométrique des nombres complexes.

Il va sans dire que l'équation d'une courbe dépend du choix du pôle et de l'axe polaire.

Passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires et réciproquement

Le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires (et réciproquement) se traite comme le passage de la forme algébrique d'un nombre complexe à la forme trigonométrique (et réciproquement) pour autant que le pôle coïncide avec l'origine des axes et que l'axe polaire soit l'axe *Ox*.

Pour transformer l'équation d'une courbe donnée en coordonnées cartésiennes en une équation en coordonnées polaires, il suffit de remplacer *x* et *y* par

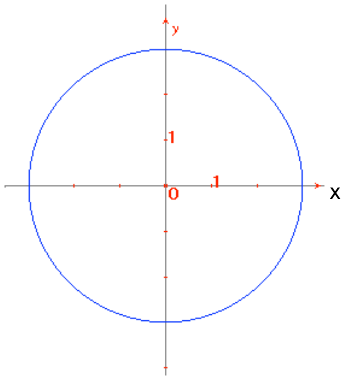
$$x = \rho\cos\theta \quad , \quad y = \rho\sin\theta$$

Pour passer des coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes, il faut procéder en sens inverse, ce qui ne sera pas toujours aisé. Les formules sont

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

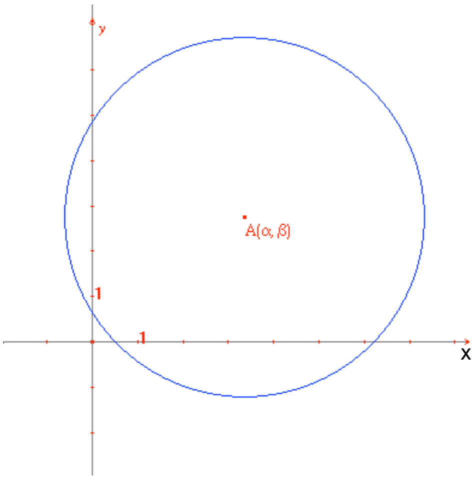
Les expressions obtenues sont parfois plus complexes que celles de départ, parfois moins, suivant le cas.

Équation du cercle en coordonnées polaires



- D'après la définition des coordonnées polaires, il est évident que le cercle de centre *O* et de rayon *R* a comme équation polaire

$$\rho = R$$



- Le cercle de centre *A*(α, β) et de rayon *R* a comme équation cartésienne

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$$

En effectuant la transformation citée plus haut, on obtient :

$$(\rho\cos\theta - \alpha)^2 + (\rho\sin\theta - \beta)^2 = R^2$$

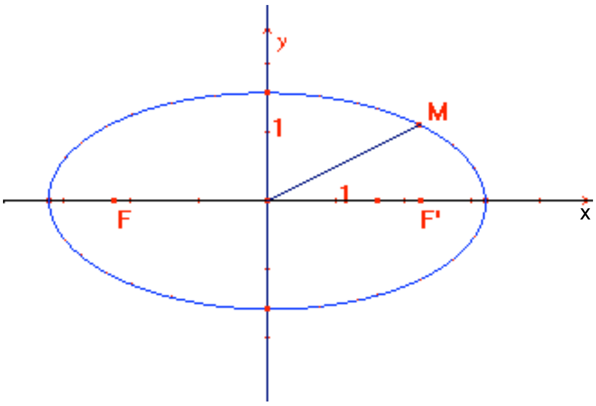
qui peut aussi s'écrire

$$\rho^2 - 2\rho(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta) + \alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

Equation de l'ellipse en coordonnées polaires

L'ellipse étant rapportée à ses axes, son équation cartésienne s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$



En effectuant la transformation citée ci-dessus, on obtient

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}=1.$$

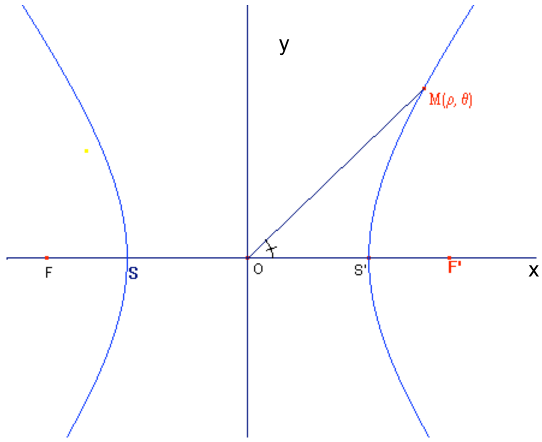
qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{\rho^2}.$$

Équation de l'hyperbole en coordonnées polaires

L'hyperbole étant rapportée à ses axes, son équation cartésienne s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



En effectuant la transformation citée ci-dessus, on obtient

$$\frac{\rho^2\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\rho^2\sin^2\theta}{b^2}=1$$

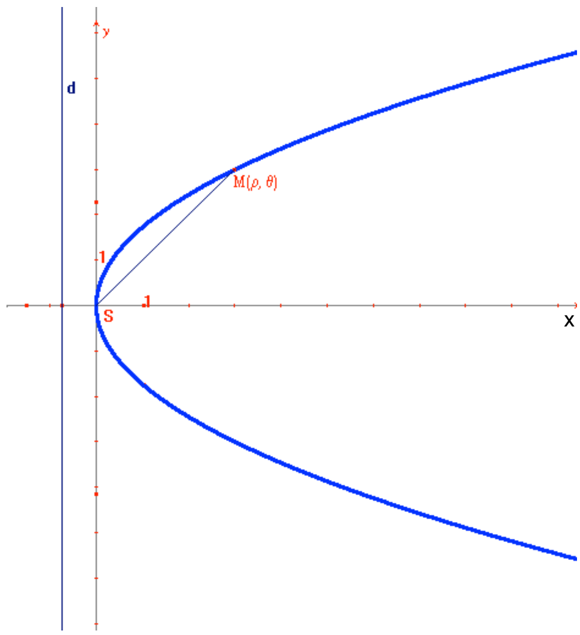
qui peut aussi s'écrire

$$\frac{\cos^2\theta}{a^2}-\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{\rho^2}$$

Équation de la parabole en coordonnées polaires

La parabole étant rapportée à son axe et à la tangente à son sommet, son équation cartésienne s'écrit

$$y^2=2px$$



En effectuant la transformation citée ci-dessus, on obtient

$$\rho^2\sin^2\theta=2p\rho\cos\theta$$

ou

$$\rho\sin^2\theta=2p\cos\theta$$

ou

$$\rho=2p\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

Équation unique des coniques en coordonnées polaires

Si on choisit comme pôle le foyer d'une conique et comme axe polaire la demi-droite $[Fx$ située sur l'axe Ox, on montre facilement que l'équation polaire des trois coniques peut s'écrire

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

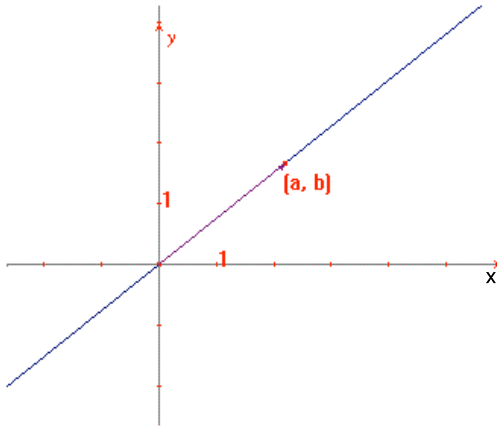
où e représente l'excentricité et p la distance entre le foyer et la directrice associée.

Il est évident que, si l'on change le repère des coordonnées polaires, on peut encore trouver d'autres équations pour les mêmes courbes, comme c'est le cas en coordonnées cartésiennes.

Chapitre 15: Les équations paramétriques de certaines courbes

Nous travaillons ici dans un système d'axes orthonormés.

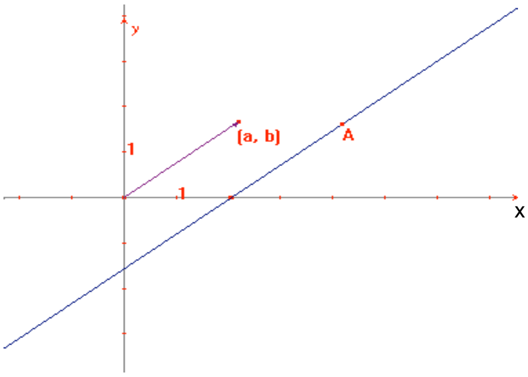
Définition
Une courbe est représentée par ses équations paramétriques lorsque les valeurs des coordonnées (ici *x* et *y*) dépendent d'un paramètre.
Il va sans dire qu'une courbe peut être représentée par différents systèmes d'équations paramétriques suivant le paramètre choisi.



Équations paramétriques d'une droite passant par l'origine et de vecteur directeur (*a, b*)

$$\begin{cases} x = ka \\ y = kb \end{cases}$$

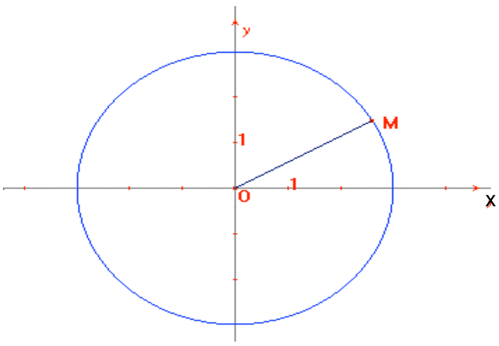
Équations paramétriques d'une droite de vecteur directeur (*a, b*) *et* passant par le point *A*(x_1, y_1)



$$\begin{cases} x = x_1 + ka \\ y = y_1 + kb \end{cases}$$

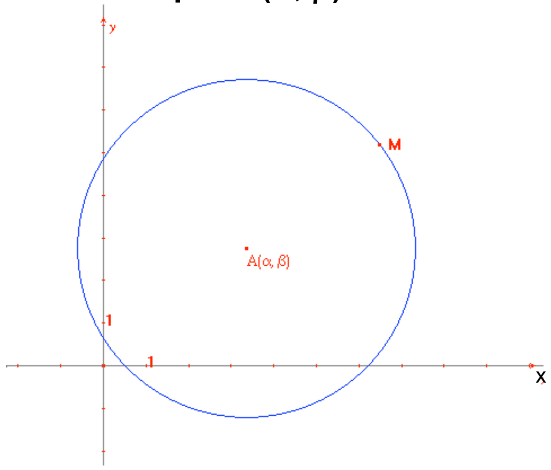
Équations paramétriques d'un cercle de rayon *R* centré à l'origine

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$$



Équations paramétriques d'un cercle de rayon *R* et centré au point (α, β)

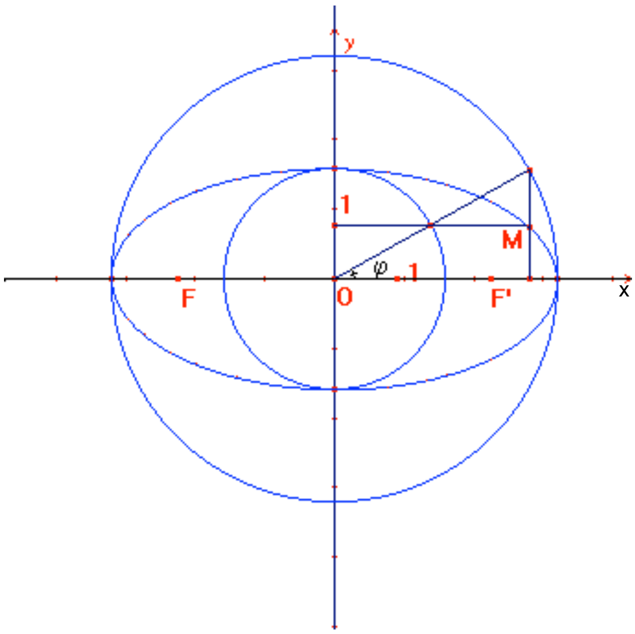
$$\begin{cases} x = \alpha + R\cos t \\ y = \beta + R\sin t \end{cases}$$



Équations paramétriques d'une ellipse rapportée à ses axes

Par un point *M* quelconque de l'ellipse, traçons des parallèles aux axes. Ces dernières coupent les cercles directeurs en deux points alignés avec *O.* Le paramètre choisi est l'angle φ formé par cette droite et *Ox.* Il est clair que les équations paramétriques sont :

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi \\ y = b\sin\varphi \end{cases}$$



Équations paramétriques d'une hyperbole rapportée à ses axes

On considère une hyperbole rapportée à ses axes et dont l'équation cartésienne est

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le cours de trigonométrie nous apprend qu'il existe une formule

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} - tg^2\varphi = 1.$$

Il est alors assez évident que l'on peut prendre pour équations paramétriques de l'hyperbole $\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos\varphi}. \\ y = b\,\mathrm{tg}\varphi \end{cases}$

Le problème qui se pose est de savoir ce que représente le paramètre φ. A cet effet, dessinons l'hyperbole rapportée à ses axes, les cercles centrés à l'origine et dont les rayons sont respectivement *a* et *b* (ces cercles sont appelés les cercles directeurs de l'hyperbole) et prenons un point *M*(*x*,*y*) situé sur l'hyperbole. Par *M*, traçons la perpendiculaire à *Ox*. Cette perpendiculaire coupe l'axe Ox en *K*. *x* est évidemment la longueur du segment [*OK*].

Par *K*, traçons la tangente au grand cercle directeur. Le point de contact avec ce cercle est *L*.

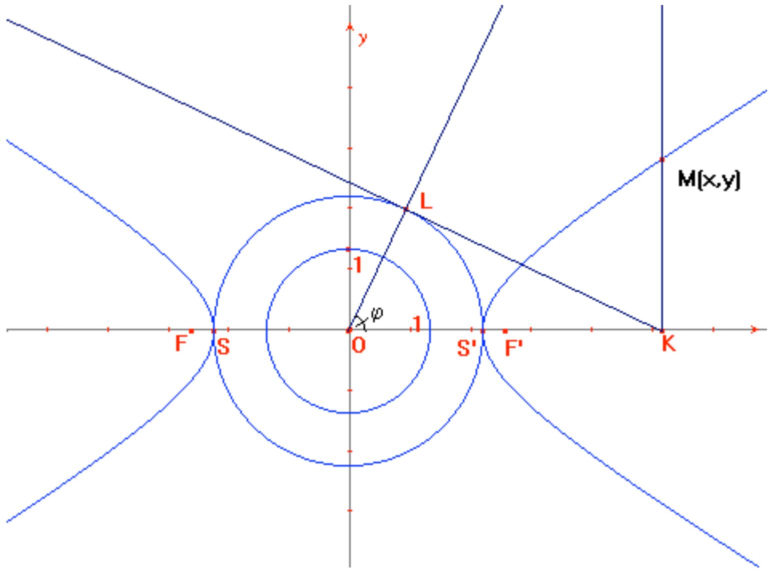
Traçons maintenant la demi-droite $[OL.$

Si φ est l'angle formé par *Ox* et $[OL$, on a dans le triangle rectangle *OLK* :

$$|OK| = x = \frac{a}{\cos\varphi}$$

L'équation de l'hyperbole montre clairement que

$$y = b\,tg\varphi$$



Équations paramétriques d'une parabole rapportée à son axe et à la tangente à son sommet

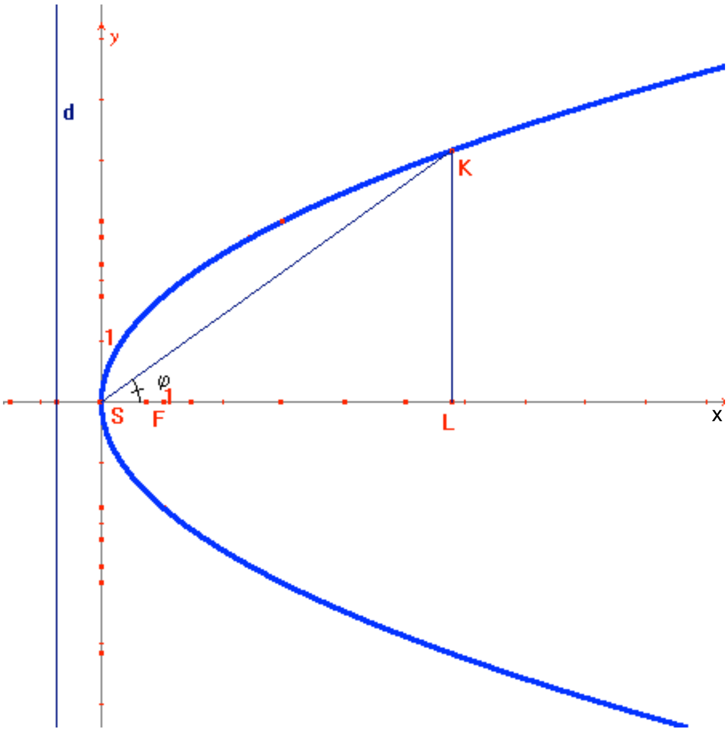
Considérons une parabole rapportée à son axe et à la tangente à son sommet, donc d'équation $y^2 = 2px$ et un point *K* de cette parabole.

Si φ représente l'angle formé par l'axe de la parabole et le segment qui joint son sommet à un point *K* quelconque de celle-ci, on a

$$\text{tg}\varphi = \frac{y}{x}$$

ce qui entraîne, compte tenu de l'équation de la courbe

$$\begin{cases} x = 2p\,\text{cotg}^2\varphi \\ y = 2p\,\text{cotg}\varphi \end{cases}$$



Chapitre 16: Construction de quelques courbes données par leurs équations paramétriques

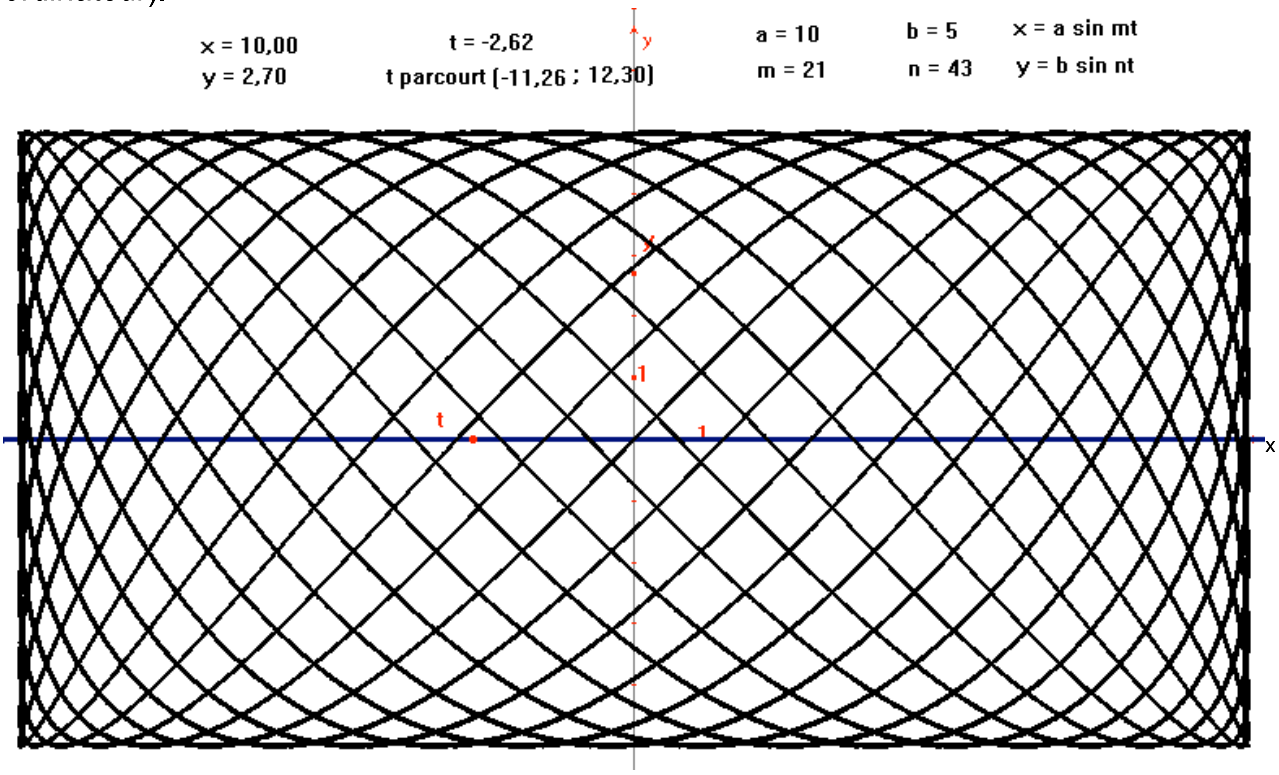
Les courbes de Lissajous

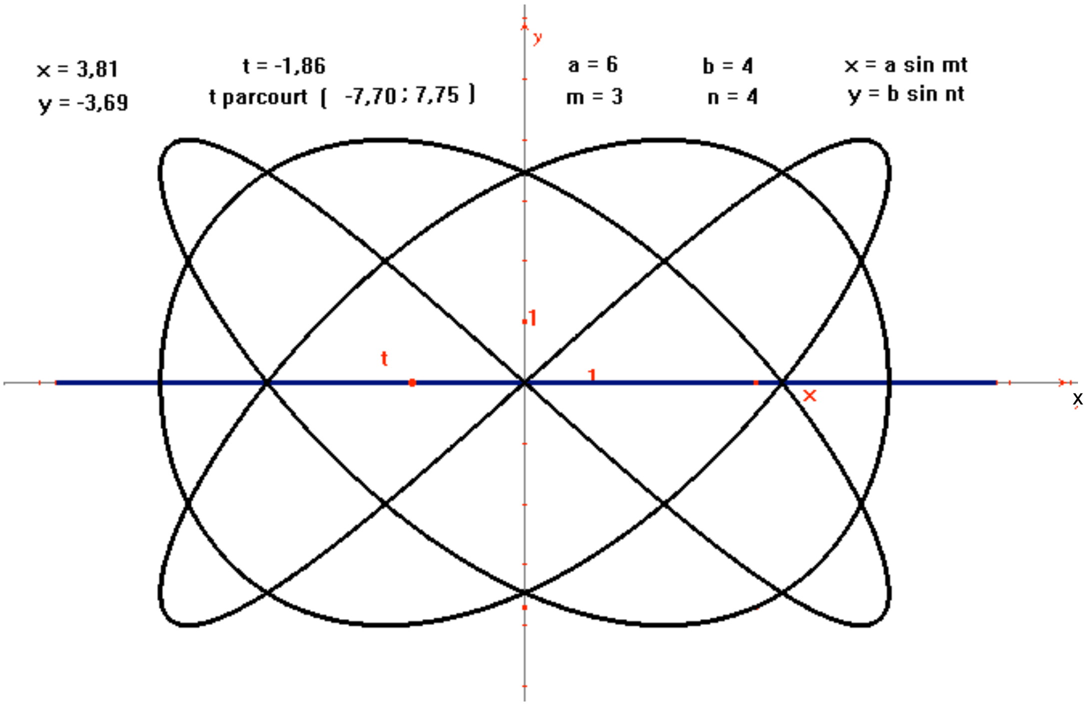
Ces courbes sont particulièrement importantes pour le cours de physique. Elles sont caractérisées par les équations paramétriques

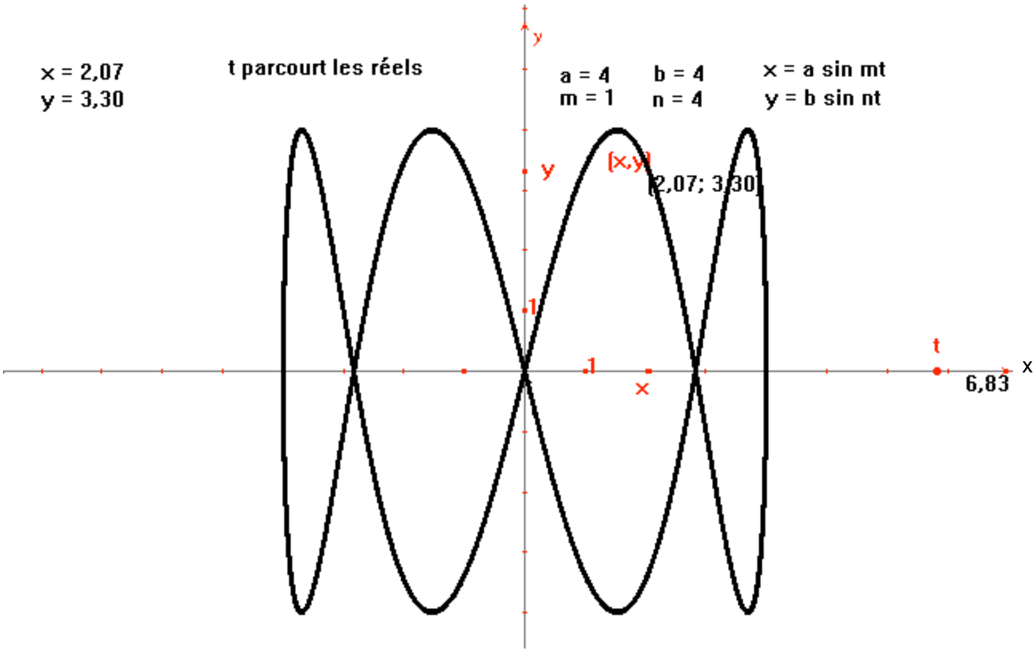
$$\begin{cases} x = a \sin mt \\ y = b \sin nt \end{cases}$$

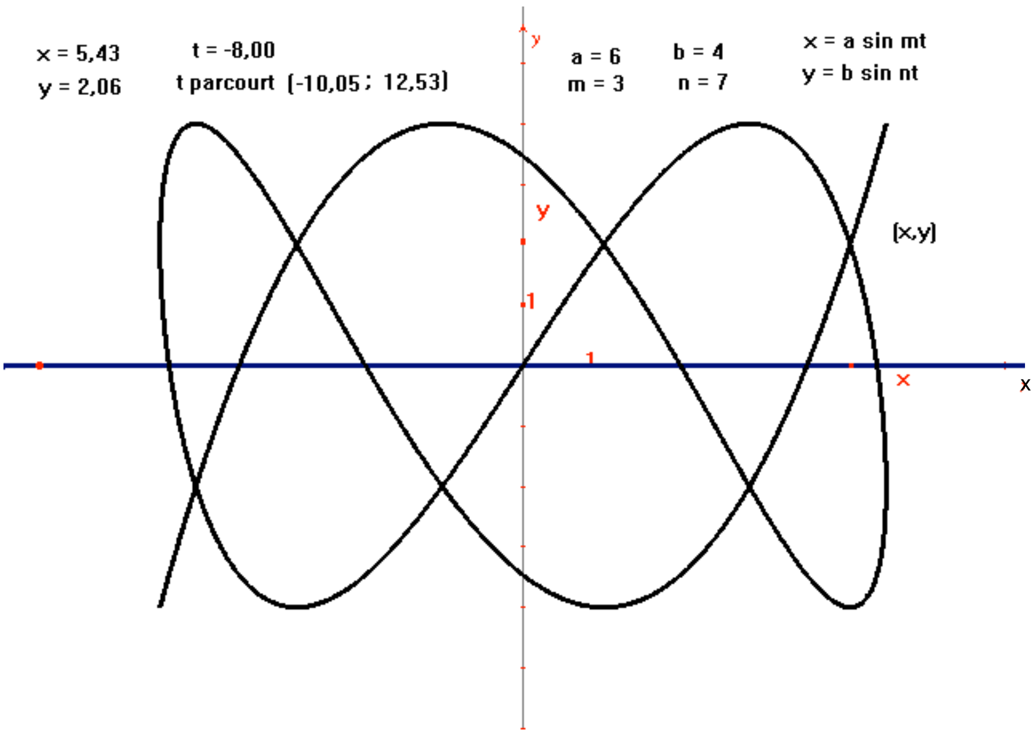
où *a, b m* et *n* sont des réels donnés et *t* le paramètre.

On trouvera ci-dessous les courbes de Lissajous d'abord dans différents cas dont les caractéristiques sont chaque fois précisées. Il existe deux méthodes pour les construire : point par point manuellement ou au moyen d'un logiciel (calculatrices graphiques ou ordinateur).






x = 2,07
y = 3,30
t parcourt les réels
a = 4
m = 1
b = 4
n = 4
x = a sin mt
y = b sin nt
(x,y)
(2,07; 3,30)
y
1
1
x
t
6,83
x
y

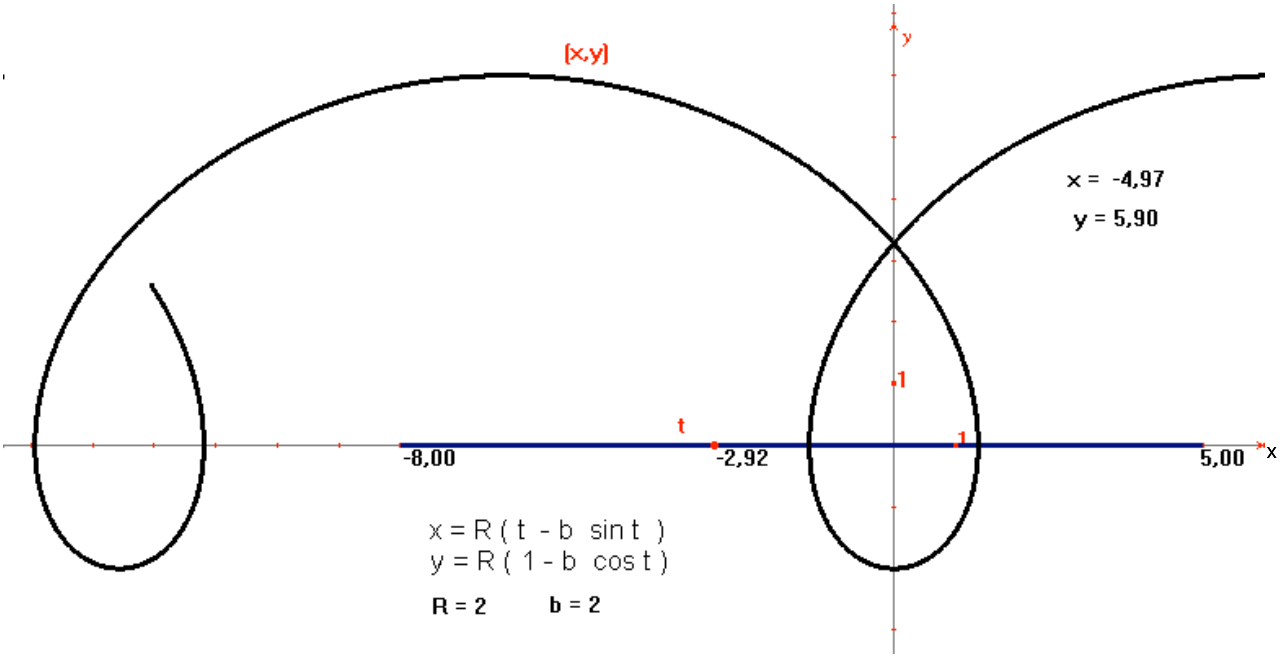

x = 5,43
y = 2,06
t = -8,00
t parcourt (-10,05 ; 12,53)
a = 6
m = 3
b = 4
n = 7
x = a sin mt
y = b sin nt
(x,y)
y
1
1
x
x
y

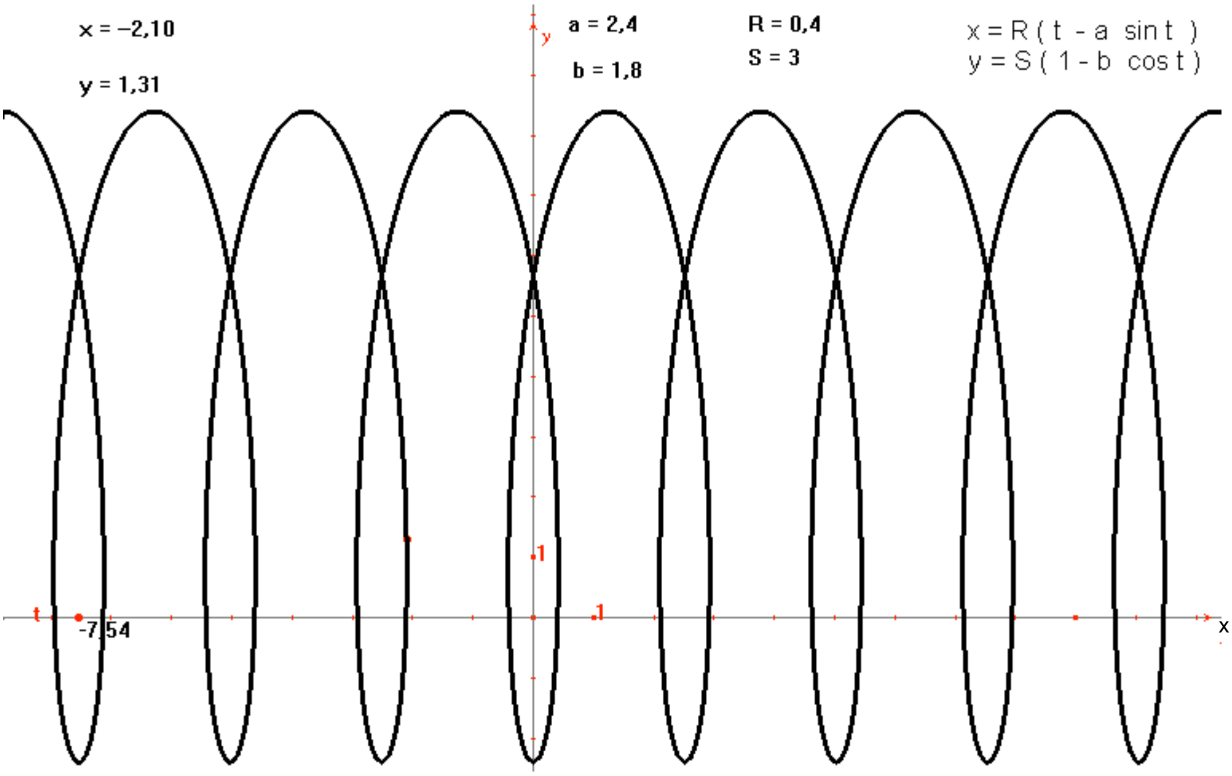
L'hypocycloïde

L'hypocycloïde est caractérisée par les équations paramétriques suivantes

$$\begin{cases} x = R(t - b\sin t) \\ y = R(1 - b\cos t) \end{cases}$$

où *R* et *b* sont des réels donnés et *t* le paramètre.
On trouvera ci-dessous l'hypocycloïde dans le cas où *R* = 2 et *b* = 2.



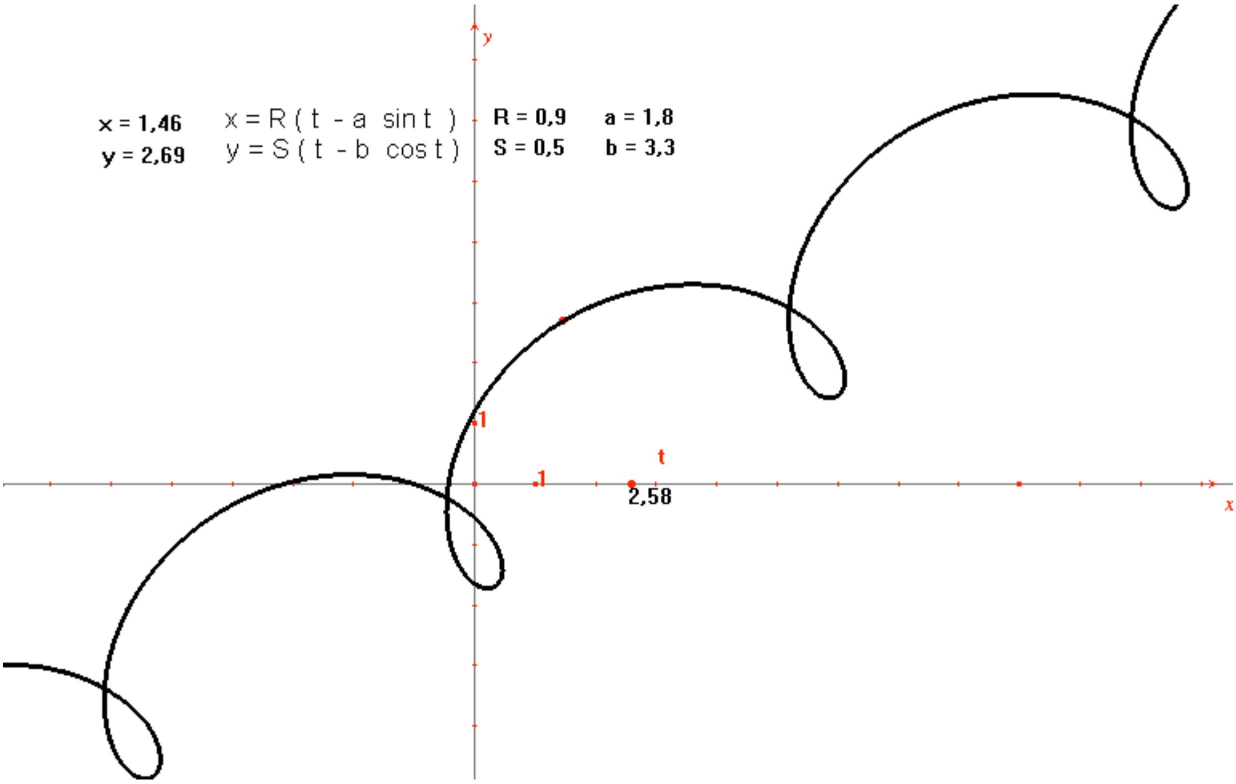


Variante de l'hypocycloïde

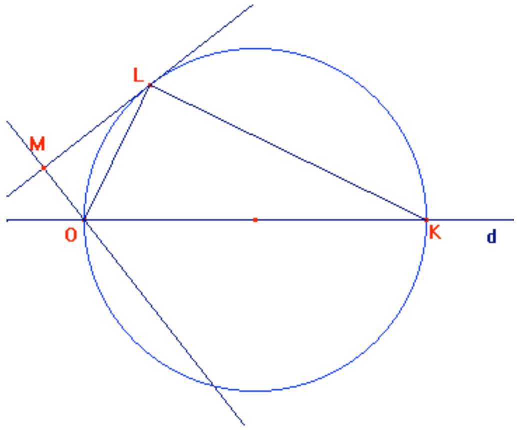
Il s'agit des courbes caractérisées par les équations paramétriques

$$\begin{cases} x = R(t - b\sin t) \\ y = S(1 - b\cos t) \end{cases}$$

où *R, S* et *b* sont des réels donnés et *t* le paramètre.



Chapitre 17: Lieux géométriques



La cardioïde

On considère un cercle et un point *O* sur ce cercle. **Le lieu géométrique des projections *M* de *O* sur les tangentes au cercle est une cardioïde.**

Choisissons *O* comme pôle et le diamètre *d* (de longueur 2*a)* du cercle passant par *O* comme axe polaire.

Les triangles rectangles *OML* et *OLK* sont semblables puisque les angles *L* et *K* de chacun de ces triangles sont égaux (angles inscrit et tangentiel interceptant le même arc). Si l'on désigne par α la mesure commune des angles précités, on a

$$|OM| = |OL|\sin\alpha \quad \text{et} \quad |OL| = |OK|\sin\alpha$$

ce qui entraîne

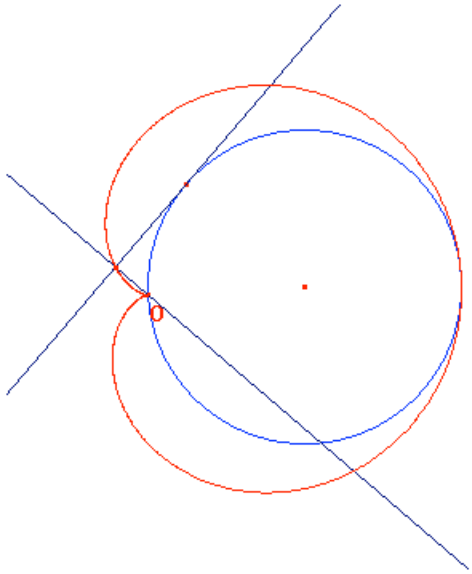
$$|OM| = |OK|\sin^2\alpha$$

et

$$\rho = 2a\sin^2\alpha$$

ou, compte tenu du fait que $\theta = 180° - 2\alpha$

$$\rho = a(1+\cos\theta)$$



La cycloïde

La cycloïde est le lieu géométrique décrit par un point d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite donnée.

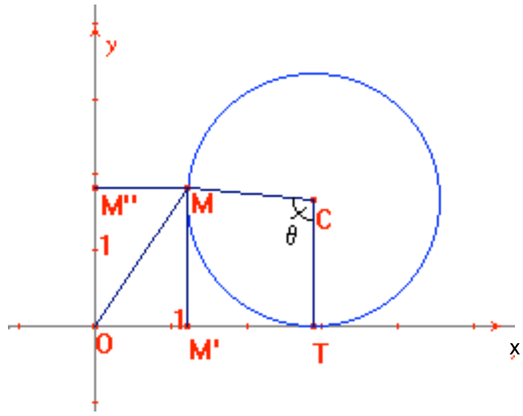
Afin de déterminer les équations cartésiennes paramétriques d'une cycloïde, considérons une droite *d,* un cercle tangent à *d* en *O* et sur le cercle un point *M* confondu au départ avec le point *O.* Le point *O* reste fixe, tandis que le point *M* reste sur le cercle et se déplace donc lorsque celui-ci roule. La figure ci-dessous montre la situation lorsque le cercle a commencé à se déplacer. Nous choisissons la droite *d* comme axe Ox et la perpendiculaire à *d* en *O* comme axe Oy ; le paramètre est l'angle θ formé par le rayon aboutissant au point de contact *T* et celui aboutissant au point *M* du lieu.

On a successivement

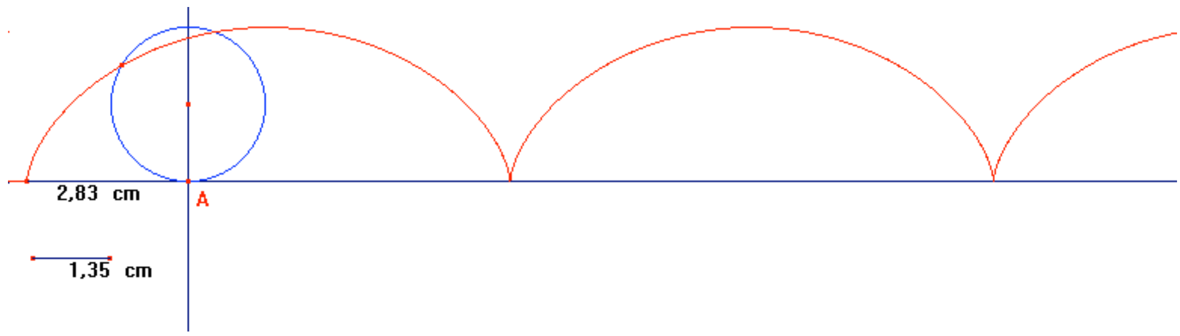
$$x = |OM'| = |OT| - |TM'|$$
$$= R\theta - R\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = R(\theta - \sin\theta)$$

et

$$y = R + R\sin(\theta - \frac{\pi}{2}) = R(1 - \cos\theta)$$



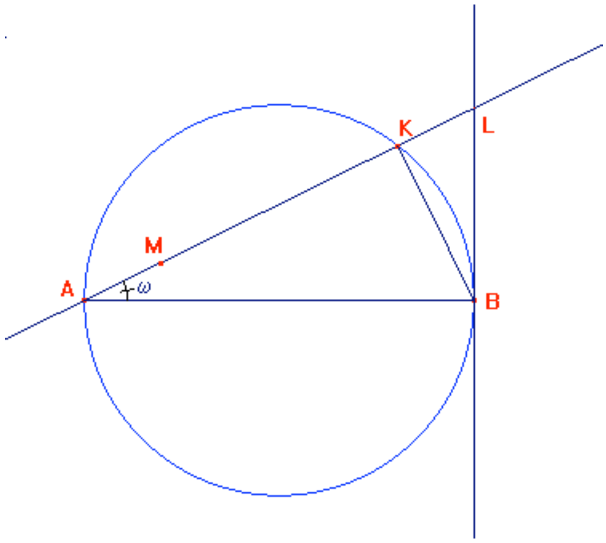
Le lieu, dessiné point par point ou par tout moyen moderne de dessin se présente comme suit



Il s'agit donc d'une fonction périodique de période 2π*R* où *R* est le rayon du cercle de départ.

Cette courbe n'est pas inconnue dans la vie courante : en effet, tout point situé sur la partie extérieure du pneu d'une roue de vélo (ou de tout autre moyen de transport) décrit une telle courbe lorsque le véhicule se déplace (sans déraper) en ligne droite. Il est évident qu'on pourrait aussi étudier le lieu décrit par un point précis d'un rayon (ou de son prolongement) d'une roue de vélo. Les mêmes études peuvent être faites lorsque le vélo roule sur un monticule (c'est-à-dire lorsque, par exemple, il roule sur un cercle donné – soit à l'intérieur, soit à l'extérieur de celui-ci).

La cissoïde



On considère un cercle *C* de diamètre [*AB*]. Par *B,* on trace la tangente *t* au cercle et par *A* une sécante variable qui coupe le cercle en un second point *K* et la tangente au point *L.*
Une cissoïde est le lieu géométrique des points *M* tels que, dans la configuration ci-dessus décrite, $|AM| = |KL|$.

Choisissons comme pôle le point *A* et comme axe polaire la demi-droite [*AB.* Tout point *M* du lieu est tel, par définition, que $|AM| = |KL|$.

Recherchons la valeur de $|AM|$ et celle de $|KL|$ en fonction de ρ et de ω et désignons par *a* la longueur du diamètre du cercle.

- Il est évident que $|AM| = \rho$
- D'autre part,

- dans le triangle rectangle *BKL*, on a

$$|KL| = |LB| \sin \omega$$

- dans le triangle rectangle *ABL*, on a

$$|LB| = |AB| \operatorname{tg} \omega$$

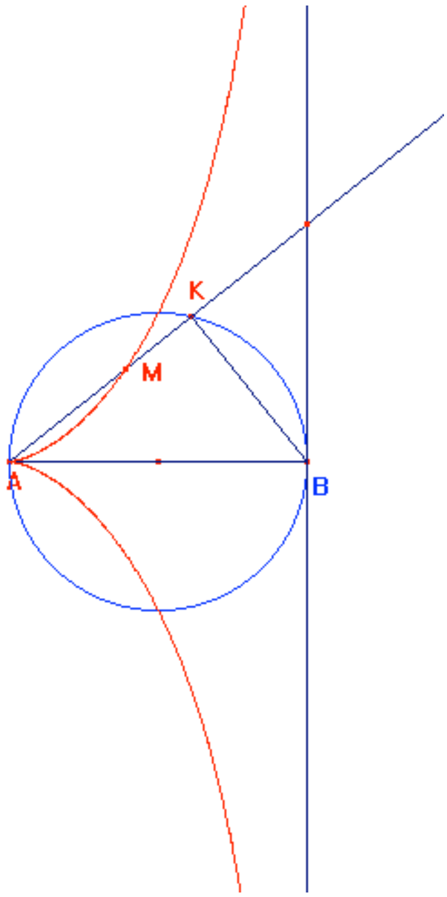
Il résulte de ces trois égalités que

$$\rho = a \frac{\sin^2 \omega}{\cos \omega}$$

où *a* représente la longueur du segment [*AB*].

Il est facile de voir que l'équation cartésienne du lieu peut s'écrire

$$y^2 (a - x) = x^3$$



La cissoïde possède donc une asymptote verticale d'équation *x* = *a.*

Le compas elliptique

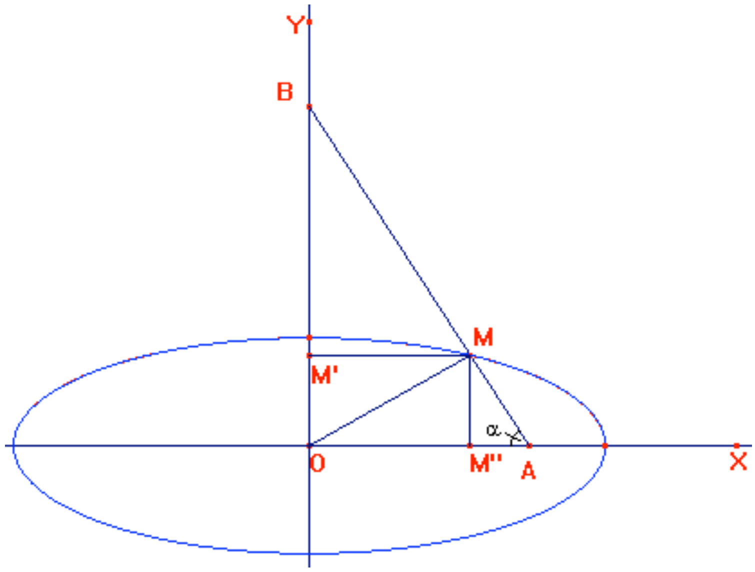
En quatrième année, nous avons étudié le lieu géométrique suivant : une échelle est posée contre un mur vertical, le sol étant horizontal. Nous avons recherché le lieu géométrique décrit par le milieu de l'échelle lorsque celle-ci glisse : il s'agit du quart de cercle centré à l'origine (intersection su sol et du mur) et de rayon égal à la moitié de l'échelle. Nous voudrions généraliser ce résultat : dans les mêmes conditions, **quel est le lieu géométrique d'un point quelconque (mais choisi au départ) de l'échelle quand celle-ci glisse ?**

Éléments fixes :

le sol (droite *OX*).

le mur (droite *OY*).

A noter aussi que le mur est perpendiculaire au sol.



Éléments mobiles :

l'échelle (droite *AB*) ; *A* varie donc sur la droite *OX* et *B* est entraîné sur la droite *OY.*

Le point *M* situé sur le segment [*AB*] bouge en même temps que le point *A* (et le point *B*).

Pour bien fixer les idées considérons que le point *M* est situé à une distance *a* du sommet de l'échelle (point *B*) et à une distance *b* du pied de l'échelle (point *A*).

L'échelle mesure donc *a* + *b.*

Analyse

Soit *M* un point du lieu.

On a

$$x = |AM''| = |M'M| = |BM| \cos\alpha = a\cos\alpha$$
$$y = |AM'| = |M''M| = |MA| \sin\alpha = b\sin\alpha$$

Il en résulte que

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha \quad \text{et} \quad \frac{y}{b} = \sin\alpha$$

et

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Le lieu cherché est donc une ellipse dont les axes mesurent respectivement 2*a* et 2*b*.

Note

Dans le cas où *M* est au milieu de l'échelle, *a* = *b* et l'ellipse devient le cercle de centre *O* et de rayon *a,* ce qui confirme le résultat obtenu précédemment.

Construction
On trace deux axes perpendiculaires *OX* et *OY.*
En prenant différents points *A* de l'axe *OX* comme centres, on trace des cercles de rayon *a* + *b.*
Ces derniers coupent l'axe *OY* en des points *B.*
Il suffit de déterminer les points *M* situés sur *AB* à la distance *b* de *A.*
Ceux-ci forment l'ellipse demandée.

Discussion
Il est évident qu'il ne faut prendre que le quart de l'ellipse situé dans le premier quadrant : l'échelle ne peut traverser le mur, ni passer en-dessous du sol.
On peut cependant modéliser le problème et obtenir toute l'ellipse.

Synthèse

Tout point de ce quart de cercle répond aux conditions imposées pour faire partie du lieu.

Le lecteur est invité à faire la démonstration de cette synthèse (assez facile).

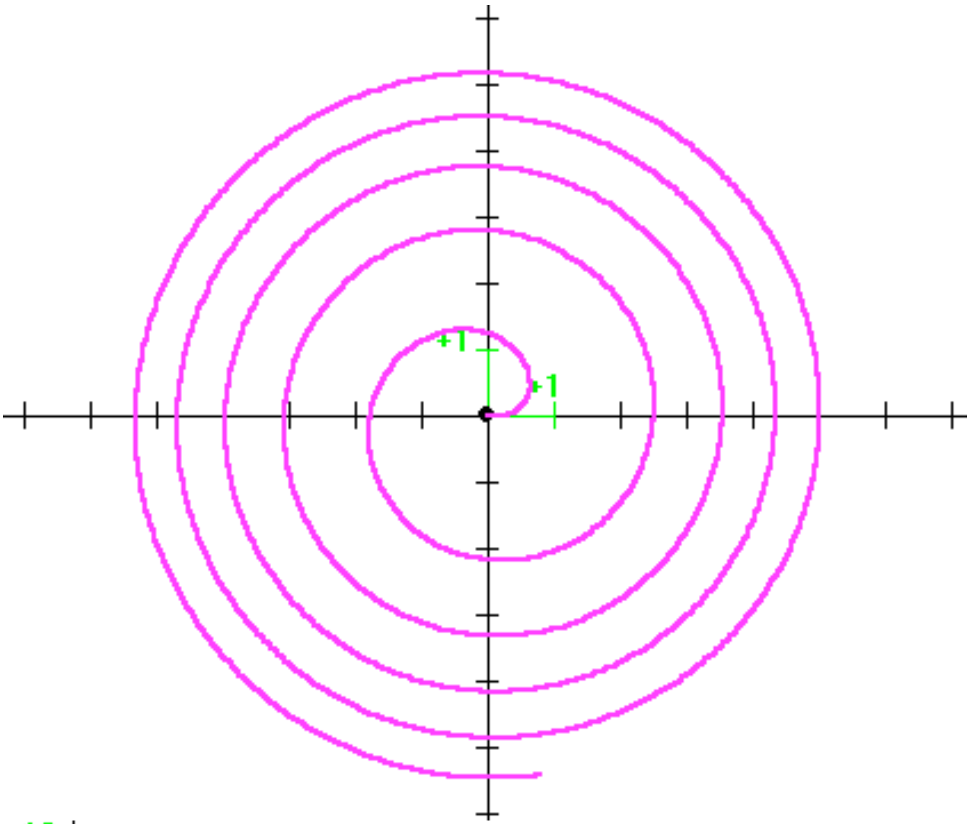
Ce lieu géométrique permet donc, comme signalé précédemment, de construire point par point une ellipse dont les axes ont des longueurs données 2*a* et 2*b*.

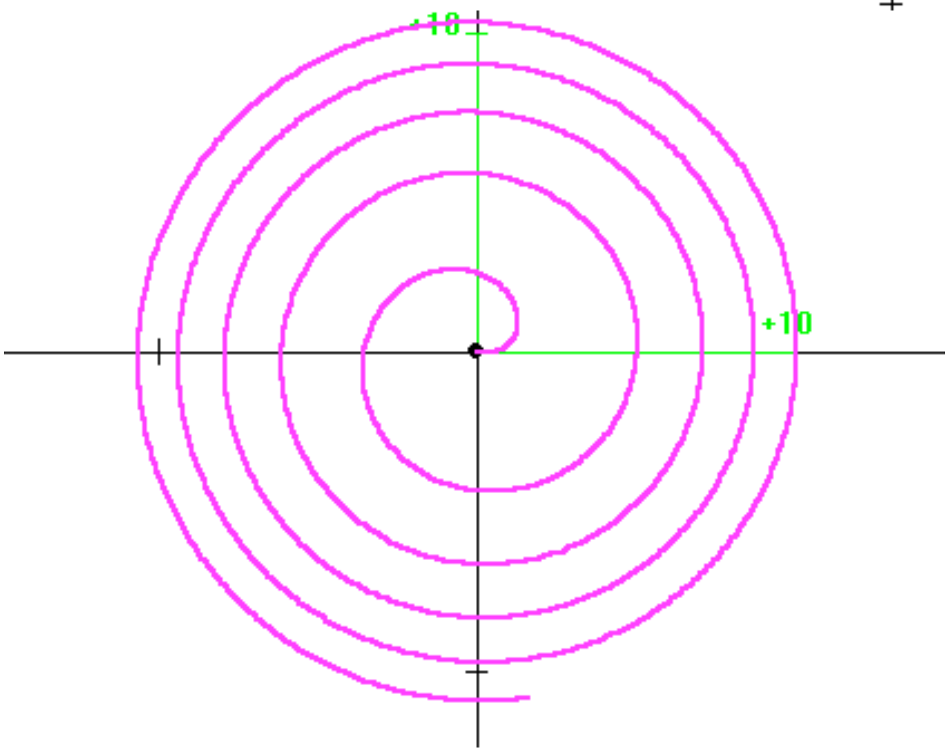
Et pour terminer la spirale

Nous travaillons ici en coordonnées polaires et avons fait varier l'angle θ entre 0 et 30 radians.

a. La spirale d'Archimède

La spirale d'Archimède est le lieu géométrique des points tels que la distance au pôle est proportionnelle à l'angle polaire du point correspondant.
Il en résulte clairement que l'équation polaire de cette courbe s'exprime par $\rho = k\theta$.
Ci-contre les spirales d'équations respectives :
$\rho = \theta$ et $\rho = 2\theta$

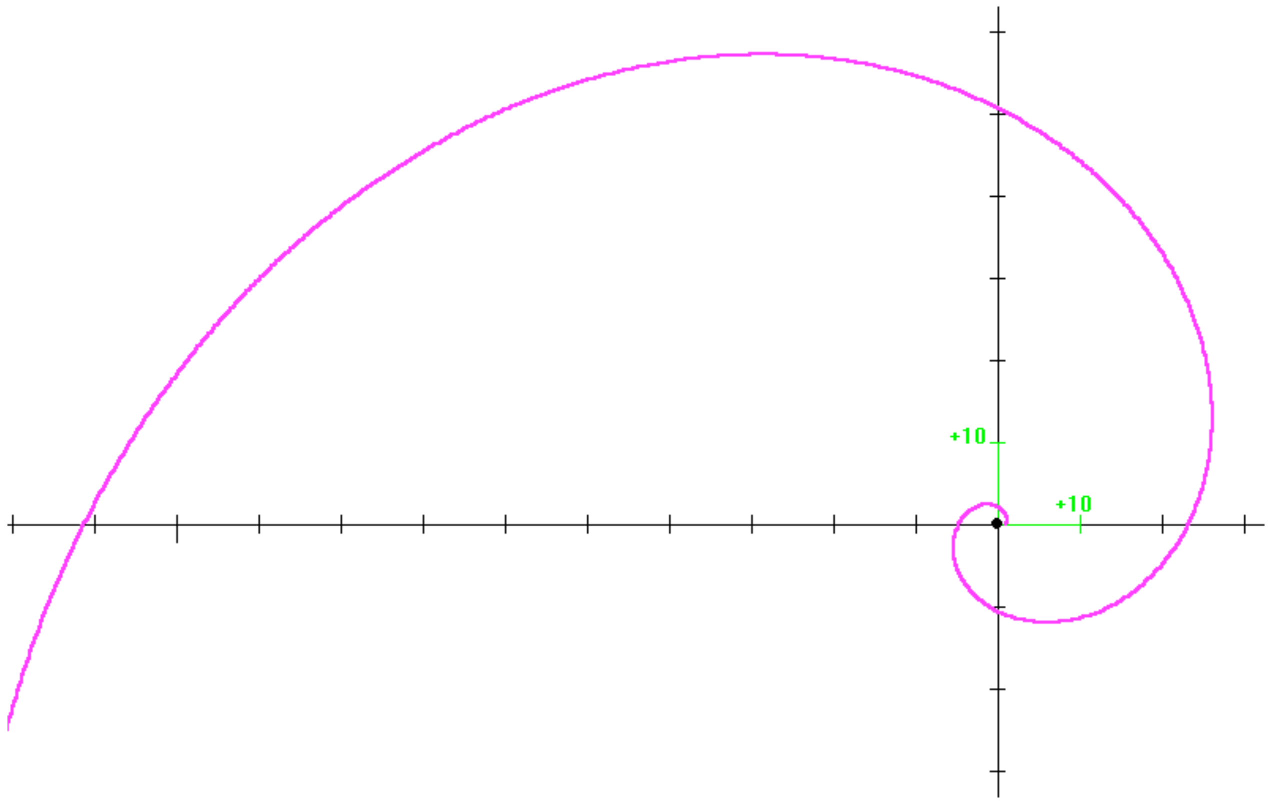




b. La spirale logarithmique

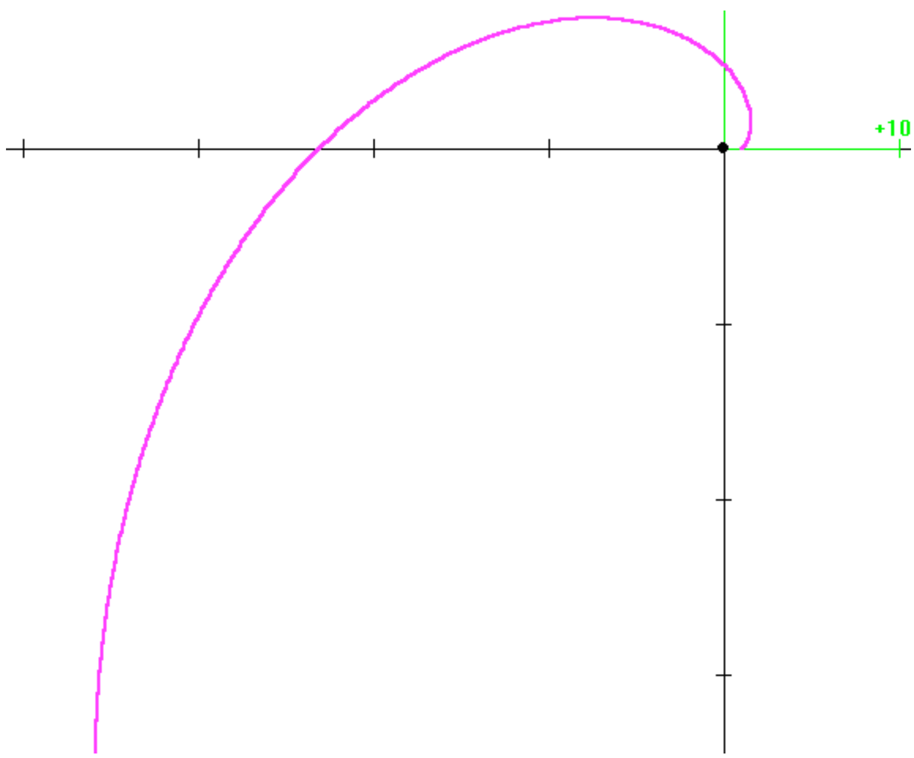
La spirale logarithmique est la courbe qui coupe sous un même angle tous les rayons vecteurs. Il est possible de montrer que l'équation d'une telle spirale peut s'écrire sous la forme

$\rho = ke^{a\theta}$ avec $a > 0$

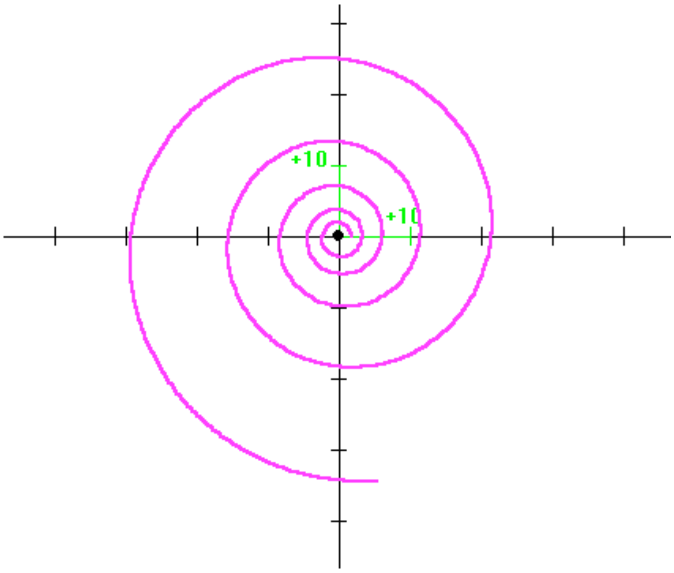


Ci-dessus : La spirale logarithmique d'équation $\rho = e^{\theta}$

Ci-dessous : La spirale logarithmique d'équation $\rho = e^{2\theta}$



Ci-dessous la spirale logarithmique d'équation $\rho = 3e^{0,2\theta}$



On trouve beaucoup de spirales dans la nature : sur certains coquillages, mais aussi la coquille de l'escargot, dans les galaxies, …