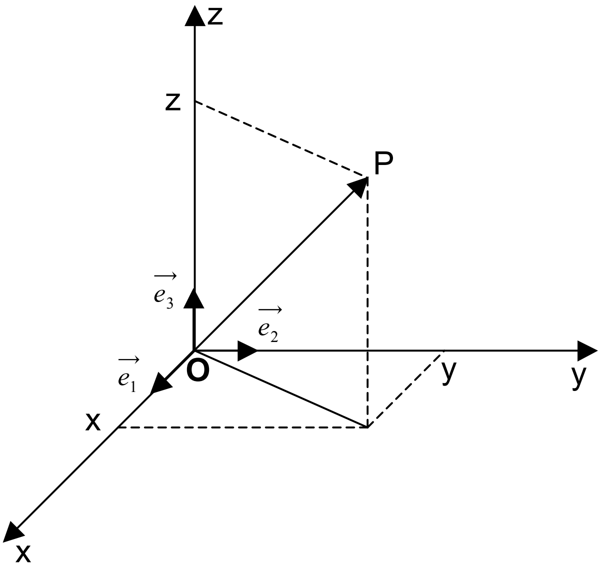
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

I. Coordonnées d'un point et composantes d'un vecteur dans l'espace (rappels)

Dans l'espace un repère est formé par un point *O* et par trois vecteurs non nuls et non coplanaires $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, représentant les vecteurs unitaires sur les axes *x, y* et *z*

Sauf précision contraire, on travaillera toujours en axes orthonormés.



♦ Pour tout point *P* de l'espace, on a :

$\overrightarrow{OP} = x\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2} + z\,\overrightarrow{e_3}$

où (x, y, z) sont les coordonnées du point *P*.

Tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de base : $\vec{v} = \alpha_1\,\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\,\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\,\overrightarrow{e_3}$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont les composantes du vecteur $\vec{v}$ dans la base $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

Considérons deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour composantes : $\overrightarrow{AB}\ \left(x_B - x_A\,,\ y_B - y_A\,,\ z_B - z_A\right)$. Il peut être considéré comme un vecteur directeur de la droite AB.

II. Équations de droites dans l'espace

1. Équation vectorielle d'une droite

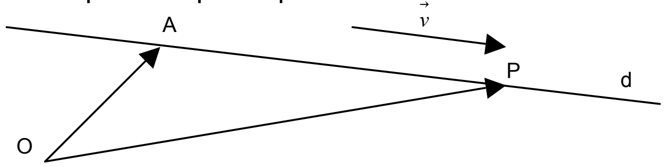
Considérons un point *A* et un vecteur $\vec{v}$ non nul : la droite *d* de vecteur directeur $\vec{v}$ et passant par *A* est l'ensemble des points *P* tels que $\overrightarrow{AP}$ est colinéaire à $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AP} \text{ colinéaire à } \vec{v} \iff \exists k \in \mathbf{R},\ \overrightarrow{AP} = k\,\vec{v}$$

L'équation

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = k\,\vec{v}}$$

est une équation vectorielle de la droite *d* passant par le point *A* et de vecteur directeur $\vec{v}$.



2. Équations paramétriques d'une droite

L'équation vectorielle

$$\overrightarrow{AP} = k\,\vec{v}$$

peut s'écrire

$$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} = k\vec{v}$$

ou

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + k\vec{v} \quad k \in \boldsymbol{R}$$

Remplaçons les vecteurs par leurs composantes ; il vient

$$(x, y, z) \;=\; (x_A, y_A, z_A) + k(v_1, v_2, v_3)$$

ce qui entraîne

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + kv_1 \\ y = y_A + kv_2 \qquad k \in \boldsymbol{R} \\ z = z_A + kv_3 \end{cases}} \qquad (1)$$

Ce sont des **équations paramétriques** de la droite *d* de vecteur directeur (v_1, v_2, v_3) et passant par le point *A* de coordonnées (x_A, y_A, z_A).

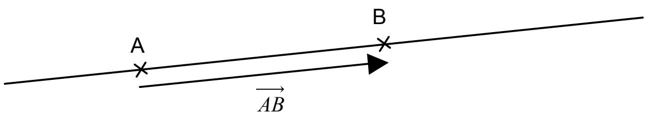
3. Équations cartésiennes d'une droite

Éliminons le paramètre *k* entre les équations paramétriques et on trouve :

$$\boxed{\frac{x - x_A}{v_1} = \frac{y - y_A}{v_2} = \frac{z - z_A}{v_3}}$$

Ce sont des équations cartésiennes de la droite *d* de vecteur directeur (v_1, v_2, v_3) et passant par le point *A* de coordonnées (x_A, y_A, z_A).

Remarque
Pour rechercher les équations cartésiennes de la droite passant par deux points donnés, on prendra comme vecteur directeur de la droite, le vecteur joignant les deux points donnés.



4. Cas particuliers

- Si $v_1 = 0 \quad (v_2 \neq 0$ et $v_3 \neq 0)$: le système (1) se ramène à : $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A + kv_2 \quad k \in \boldsymbol{R} \\ z = z_A + kv_3 \end{cases}$

et les équations cartésiennes se ramènent à : $\begin{cases} x = x_A \\ \dfrac{y - y_A}{v_2} = \dfrac{z - z_A}{v_3} \end{cases}$.

La droite est incluse dans un plan parallèle au plan *Oyz*.

♦ Si $v_1 = v_2 = 0 \quad (v_3 \neq 0)$: le système (1) se ramène à : $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \\ z = z_A + kv_3 \end{cases} \qquad k \in \boldsymbol{R}$

et les équations cartésiennes se ramènent à : $\begin{cases} x = x_A \\ y = y_A \end{cases}$.

La droite est parallèle à l’axe *z*.

Exercices :

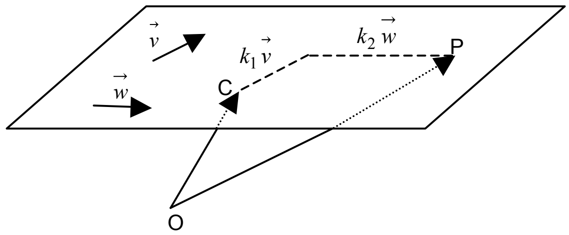
Détermine le système d’équations paramétriques ainsi que le système d’équations cartésiennes des droites :

a de vecteur directeur (1 ;2 ;3) et passant par l’origine
b de vecteur directeur (-1 ;2 ;-3) et passant par (3 ;4 ;5)
c passant par les points (2 ;1 ;3) et (1 ;0 ;2)
d passant par les points (3 ;4 ;2) et (-1 ;-2 ;3)
e parallèle à la droite **a** par le point (3 ;4 ;2)
f parallèle à la droite **c** par le point (0 ;0 ;7)
g parallèle à l’axe **x** par le point (1 ;1 ;7)
h parallèle à l’axe **y** par le point (1 ;1 ;7)
i parallèle à l’axe **z** par le point (1 ;1 ;7)

III. Équation d'un plan dans l'espace

1. Equation vectorielle d'un plan

Considérons un plan π, un point *C* appartenant à ce plan et deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls parallèles au plan mais non parallèles entre eux.
Pour tout point *P* appartenant à π, on a :



$$\overrightarrow{CP} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

L'équation

$$\boxed{\overrightarrow{CP} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w}}$$

est **une équation vectorielle** du plan de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et passant par le point *C*.

2. Équations paramétriques d'un plan

L'équation vectorielle

$$\overrightarrow{CP} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

peut s'écrire

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + k_1\vec{v} + k_2\vec{w} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$

Remplaçons les vecteurs par leurs composantes ; il vient :

$$(x, y, z) = (x_C, y_C, z_C) + k_1(v_1, v_2, v_3) + k_2(w_1, w_2, w_3)$$

ce qui entraîne

$$\boxed{\begin{cases} x = x_C + k_1 v_1 + k_2 w_1 \\ y = y_C + k_1 v_2 + k_2 w_2 \\ z = z_C + k_1 v_3 + k_2 w_3 \end{cases} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

Ce sont des équations paramétriques du plan de vecteurs directeurs (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3) et passant par le point *C* de coordonnées (x_C, y_C, z_C).

3. Équation cartésienne d'un plan

On élimine les paramètres k_1 et k_2 entre les équations paramétriques et on trouve :

$$(v_2w_3 - v_3w_2)\ (x - x_C) - (v_1w_3 - v_3w_1)\ (y - y_C) + (v_1w_2 - v_2w_1)\ (z - z_C) = 0$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$\begin{vmatrix} x - x_C & y - y_C & z - z_C \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

On obtient une équation du type $\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ qui est une équation linéaire du 1er degré. C'est l'équation cartésienne du plan π passant par le point *C* de coordonnées (x_C, y_C, z_C) et de vecteurs directeurs (v_1, v_2, v_3) et (w_1, w_2, w_3).

Remarques

- <u>Plan déterminé par trois points non alignés *A, B* et *C*</u> :

On prendra comme vecteurs directeurs deux des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC}$.

- <u>Plan déterminé par une droite *d* et un point *C* n'appartenant pas à *d*</u> :

On prendra comme premier vecteur directeur du plan un vecteur directeur de *d*.
Un autre vecteur directeur du plan sera un vecteur joignant *C* à un point de *d.*

- <u>Plan déterminé par deux droites sécantes</u> :

Les vecteurs directeurs de chacune des droites sont des vecteurs directeurs du plan.

- <u>Plan déterminé par deux droites parallèles :</u>

Un vecteur directeur de l'une des deux droites est un vecteur directeur du plan.
Le vecteur joignant un point de l'une des droites à un point de l'autre est un autre vecteur directeur du plan.

IV. Équations de plans particuliers

1. Plans comprenant l'origine

$$ax + by + cz = 0$$

2. Plans comprenant le point (x_A, y_A, z_A) et parallèles aux plans *Oxy, Oxz* ou *Oyz*

Plan parallèle à *Oxy* : $z = z_A$ En particulier : $Oxy \equiv z = 0$

Plan parallèle à *Oxz* : $y = y_A$ En particulier : $Oxz \equiv y = 0$

Plan parallèle à *Oyz* : $x = x_A$ En particulier : $Oyz \equiv x = 0$

3. Plans contenant *Ox, Oy* ou *Oz*

Plans contenant *Ox* : $by + cz = 0$

Plans contenant *Oy* : $ax + cz = 0$

Plans contenant *Oz* : $ax + by = 0$

4. Plans parallèles à *Ox* , *Oy* ou *Oz*

Plan parallèle à *Ox* : $by + cz + d = 0$

Plan parallèle à *Oy* : $ax + cz + d = 0$

Plan parallèle à *Oz* : $ax + by + d = 0$

Exercices :

Détermine le système d'équations paramétriques ainsi que l'équation cartésienne des plans :

- α de vecteurs directeurs (1 ;0 ;2) et (0 ;1 ;1) passant par l'origine
- β de vecteurs directeurs (1 ;0 ;2) et (0 ;1 ;1) passant par (1 ;1 ;4)
- γ de vecteurs directeurs (2 ;-2 ;3) et (1 ;-1 ;2) passant par (1 ;1 ;0)
- δ passant par les points (1 ;2 ;4) (3 ;2 ;-1) et (1 ;4 ;5)
- ε passant par les points (1 ;2 ;3) (-1 ;2 ;1) et (5 ;-4 ;1)

V. Positions relatives d'une droite et d'un plan

On considère le plan d'équation

$$\pi \equiv \quad ax + by + cz + d = 0 \qquad (1)$$

et la droite *d* d'équations paramétriques

$$d \equiv \quad \begin{cases} x = x_A + kv_1 \\ y = y_A + kv_2 \\ z = z_A + kv_3 \end{cases} \qquad k \in \boldsymbol{R} \qquad (2)$$

Pour trouver le point de percée (s'il existe) de la droite *d* dans le plan π , il suffit de résoudre le système formé par l'équation du plan et celles de la droite, c'est-à-dire de remplacer dans l'équation du plan (1) *x, y* et *z* par leurs valeurs tirées des équations de la droite (2).

On obtient : $k.(av_1 + bv_2 + cv_3) = -ax_A - by_A - cz_A - d$

Trois cas sont possibles :

<u>1^er cas</u> : $av_1 + bv_2 + cv_3 \neq 0$: on trouve une valeur de *k* que l'on remplace dans les équations (2) de la droite afin d'obtenir les coordonnées du point de percée.

<u>2^e cas</u> : $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ et $-ax_A - by_A - cz_A - d \neq 0$: *k* n'existe pas et la droite est parallèle au plan.

<u>3^e cas</u> : $av_1 + bv_2 + cv_3 = 0$ et $-ax_A - by_A - cz_A - d = 0$: *k* est indéterminé et la droite est incluse dans le plan.

Exercices :

1. Donne les positions relatives des plans :

$$\alpha_1 \equiv 2x - 4y + 6z - 8 = 0$$
$$\alpha_2 \equiv -x + 2y - 3z + 7 = 0$$
$$\alpha_3 \equiv 2x + 5y + 2z = 0$$
$$\alpha_4 \equiv -4x + 8y - 12z = 16$$

2. Donne les positions relatives des droites et des plans :

$\alpha_1 \equiv y = 4$

$\alpha_2 \equiv 2x - z + 3 = 0$

$\alpha_3 \equiv x + y + z - 4 = 0$

$\alpha_4 \equiv 2x + y + 5 = 0$

$\alpha_5 \equiv x + z - 6 = 0$

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 3 \\ z = 2t - 1 \end{cases} \quad d_2 \equiv 2 - x = \frac{y-1}{3} = z - 4 \quad d_3 \equiv \begin{cases} x = -u + 1 \\ y = 2u + 2 \\ z = 3u + 3 \end{cases}$$

3. Donne les positions relatives des droites :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \\ z = t - 1 \end{cases} \quad d_2 \equiv 2 - x = \frac{y-1}{3} = z - 4 \quad d_3 \equiv \begin{cases} x = 2u + 1 \\ y = 2 - 6u \\ z = 3 - 2u \end{cases}$$

4. Intersection de deux plans :

Détermine l'intersection des deux plans α et β :

a) $\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + 3y - z = 1 \\ \beta \equiv x + y + z = 2 \end{array}}$ b) $\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + 3y - 4z = 12 \\ \beta \equiv x + y - z = 1 \end{array}}$ c) $\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv x + y = 2z \\ \beta \equiv x + z = 2y \end{array}}$

5. Intersection d'une droite et d'un plan :

Détermine l'intersection du plan α et de la droite d :

a) $\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + 4y - 5z + 6 = 0 \\ d \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{2} = z - 3 \end{array}}$ b) $\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv x + y - 2z = 2 \\ d \equiv \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = t - 2 \\ z = -t + 1 \end{cases} \end{array}}$ c) $\boxed{\begin{array}{l} \alpha \equiv 2x + 3y + 6z + 4 = 0 \\ d \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{6} = \frac{5-z}{4} \end{array}}$

6. Intersection de deux droites:

Détermine l'intersection des deux droites d_1 et d_2

a) $\boxed{\begin{array}{l} d_1 \equiv \frac{x+1}{3} = y = \frac{z-1}{2} \\ d_2 \equiv \begin{cases} x = 3\lambda - 3/2 \\ y = \lambda \\ z = -2\lambda + 3/2 \end{cases} \end{array}}$ b) $\boxed{\begin{array}{l} d_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = -\lambda + 3 \end{cases} \\ d_2 \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 2 \\ y = \lambda - 3 \\ z = 2\lambda + 10 \end{cases} \end{array}}$ c) $\boxed{\begin{array}{l} d_1 \equiv x - 3 = \frac{y-4}{3} = \frac{z-2}{2} \\ d_2 \equiv \frac{2-x}{2} = \frac{1-y}{6} = \frac{-z}{4} \end{array}}$

7. On donne les points A(3 ;1 ;0) et B(4 ;0 ;2)

Le point A et l'axe z déterminent un plan noté α. Le point B et l'axe y déterminent un plan noté β.
α et β se coupent suivant une droite d.
Détermine la coordonnée du point de percée de d dans le plan parallèle au plan yz par le point (5 ;0 ;0)

VI. Produit scalaire (rappels)

1. Définition

$$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\cos\theta$$

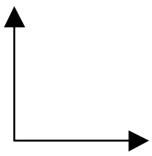
- $\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}}$ est la norme du vecteur $\vec{u}$.
- Une base est normée si et seulement si les vecteurs de base sont normés.
- Une base est orthonormée si et seulement si les vecteurs de la base sont normés et orthogonaux deux à deux.

Remarque

$\sqrt{\vec{u}^{\,2}} \neq \vec{u}$ car $\sqrt{\vec{u}^{\,2}}$ est un réel, alors que $\vec{u}$ est un vecteur.

2. Vecteurs perpendiculaires

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls et perpendiculaires est nul et réciproquement.



$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\|\,.\,\left\|\vec{v}\right\|\,.\,\cos\,(\underbrace{\vec{u},\ \vec{v}}_{\frac{\pi}{2}})$$

$\vec{u}$ orthogonal ‡ $\vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

3. Expression analytique du produit scalaire

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v}\,(v_1, v_2, v_3)$ s'écrit :

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = u_1\,v_1 + u_2\,v_2 + u_3\,v_3}$$

4. Norme d'un vecteur

La norme du vecteur : $\vec{u}\,(u_1, u_2, u_3)$ s'écrit :

$$\boxed{\left\|\vec{u}\right\| = \sqrt{\vec{u}^{\,2}} = \sqrt{u_1^{\,2} + u_2^{\,2} + u_3^{\,2}}}$$

5. Distance entre deux points

La distance des points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ s'écrit :

$$\boxed{d\left(A,B\right) = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}}$$

Pour rappel, les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\left(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\right)$.

6. Angle de deux droites[1]

Par définition, l'angle de deux droites gauches est l'angle aigu formé par l'une des droites et la parallèle à l'autre menée par un point quelconque de la première.

Considérons les droites *d* et *d'* et leurs vecteurs directeurs respectifs :

$$\overrightarrow{u_d}\ (u_1, u_2, u_3) \ \text{ et } \ \overrightarrow{v_{d'}}\ (v_1, v_2, v_3)$$

On a :

$$\left| \vec{u} . \vec{v} \right| = \left\| \vec{u} \right\| . \left\| \vec{v} \right\| . \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\left| \vec{u} . \vec{v} \right| = \left| u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \right|$$

d'où :

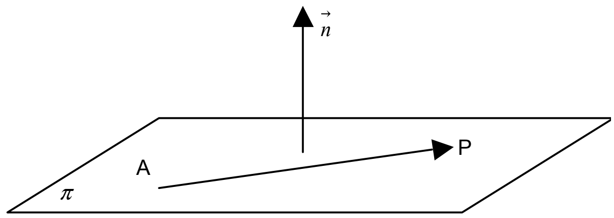
$$\boxed{\cos\left(\widehat{d, d'}\right) = \frac{\left| u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 \right|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}\ \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}}$$

[1] Hors programme

VII. Équation cartésienne d'un plan en fonction d'un vecteur normal

1. Vecteur normal à un plan

On considère un plan π et un point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ appartenant à ce plan π.
Soit $P(x, y, z)$ un point quelconque différent de *A* de ce plan π.
Soit $\vec{n}\,(a, b, c)$ un vecteur non nul orthogonal à π.
On a :



$$\overrightarrow{AP} \quad (x - x_A \ , \ y - y_A \ , \ z - z_A)$$

$$\begin{aligned} \forall P \in \pi, \quad \overrightarrow{AP} \perp \vec{n} \quad & \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}.\vec{n} = 0 \\ & \Leftrightarrow a.(x - x_A) - b.(y - y_A) - c.(z - z_A) = 0 \\ & \Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0 \end{aligned}$$

On obtient une équation du type : $ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n}\,(a, b, c)$ est appelé **vecteur normal** au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Exemple
Soit le plan $\pi \equiv 3x - 2y + 5z - 4 = 0$
Donner les coordonnées d'un vecteur normal au plan π.

Réponse : (3, -2, 5).

2. Distance d'un point à un plan

En géométrie plane :
Considérons un point $A\,(x_A, y_A)$ et une droite $d \equiv ax + by + c = 0$
La distance du point *A* à la droite *d* est

$$d(A,d) = \frac{|\, ax_A + by_A + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Par extension en géométrie dans l'espace :

On considère un point $A\,(x_A, y_A, z_A)$ et un plan $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$
La distance du point *A* au plan π est

$$d(A,\pi) = \frac{|\, ax_A + by_A + cz_A + d \,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exemple

La distance du point $A\ (2,3,4)$ au plan $\pi \equiv 2x-5y+z-4=0$ est

$$d(A,\pi)=\frac{|2.2-5.3+1.4-4|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+1^2}}=\frac{11}{\sqrt{30}}=\frac{11\sqrt{30}}{30}$$

3. Parallélisme et orthogonalité de droites et de plans (On suppose qu'aucun dénominateur n'est nul[2])

On considère les droites :

$$d_1 \equiv \frac{x-x_A}{u_1}=\frac{y-y_A}{u_2}=\frac{z-z_A}{u_3} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \frac{x-x_B}{v_1}=\frac{y-y_B}{v_2}=\frac{z-z_B}{v_3}$$

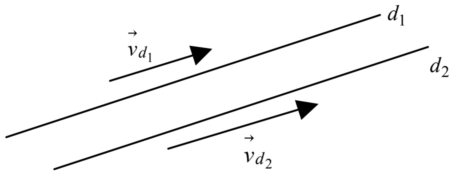
et les plans :

$$\pi_1 \equiv a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad \text{et} \quad \pi_2 \equiv a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

a) Droites parallèles

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont parallèles c'est-à-dire si et seulement si les coordonnées de leurs vecteurs directeurs sont proportionnelles.

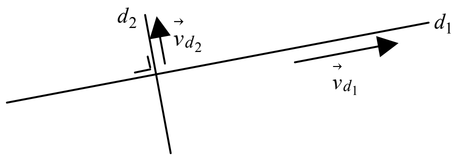
$$\boxed{d_1 // d_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{u_1}{v_1}=\frac{u_2}{v_2}=\frac{u_3}{v_3}}$$



b) Droites orthogonales

Deux droites sont orthogonales si et seulement si un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre c'est-à-dire que le produit scalaire des vecteurs directeurs est nul.

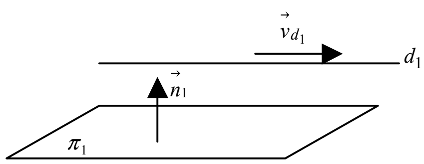
$$\boxed{d_1 \perp d_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0}$$



c) Droite parallèle à un plan

Une droite est parallèle à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est orthogonal à un vecteur normal du plan c'est-à-dire que le produit scalaire des vecteurs est nul.

$$\boxed{d_1 // \pi_1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1u_1+b_1u_2+c_1u_3=0}$$

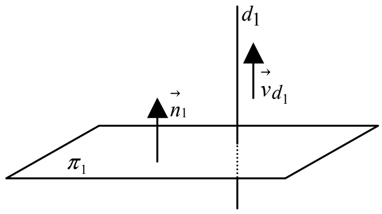


[2] Lorsqu'un dénominateur est nul, il est indispensable que le numérateur qui lui correspond soit nul aussi.

d) Droite orthogonale à un plan

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si un vecteur directeur de la droite est parallèle à un vecteur normal du plan.

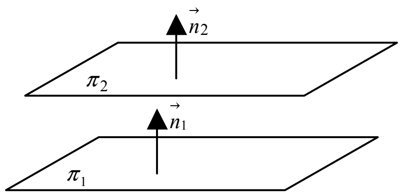
$$\boxed{d_1 \perp \pi_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{u_1}{a_1} = \frac{u_2}{b_1} = \frac{u_3}{c_1}}$$



e) Plans parallèles

Deux plans sont parallèles si et seulement si un vecteur normal de l'un est parallèle à un vecteur normal de l'autre.

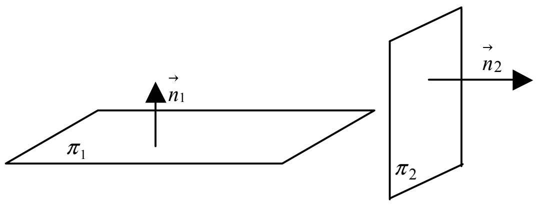
$$\boxed{\pi_1 // \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$



f) Plans orthogonaux

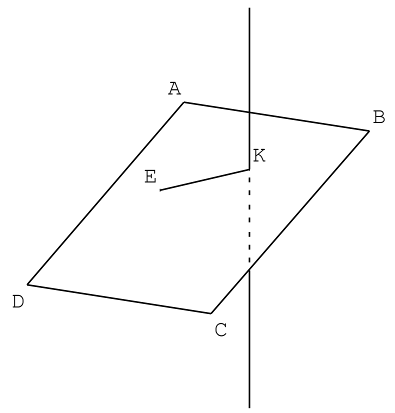
Deux plans sont orthogonaux si et seulement si un vecteur normal de l'un est orthogonal à un vecteur normal de l'autre.

$$\boxed{\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0}$$



4. Distance d'un point à une droite

La distance d'un point à une droite est la distance du point donné au point de percée de la droite dans le plan contenant le point et orthogonal à la droite.



5. Angle aigu de deux plans[3]

L'angle aigu de deux plans est l'angle aigu formé par les deux vecteurs normaux aux deux plans considérés

Soit $\overrightarrow{n_1}\ (a_1, b_1, c_1)$ et $\overrightarrow{n_2}\ (a_2, b_2, c_2)$ les vecteurs normaux respectifs à π_1 et à π_2.

$$\cos\ (\widehat{\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}}) = \frac{|\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2\ |}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\,.\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$

6. Angle aigu d'une droite et d'un plan[4]

L'angle aigu d'une droite et d'un plan est l'angle aigu formé par la droite et sa projection orthogonale sur le plan, c'est donc le complémentaire de l'angle aigu formé par la droite et une droite orthogonale au plan.

Soit un plan $\pi \equiv\ ax + by + cz + d = 0$ et une droite *d* de vecteur directeur $\overrightarrow{v_d}\ (v_1, v_2, v_3)$

L'angle entre la droite *d* et le plan π est le complémentaire de l'angle entre le vecteur normal $\vec{n}$ et le vecteur $\vec{v}_d$.

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}, \vec{v}_d}\right) = \frac{|av_1 + bv_2 + cv_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\,.\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}} = \sin\left(\widehat{d, \pi}\right)$$

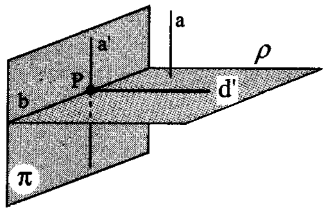
---

[3] Hors programme.
[4] Hors programme.

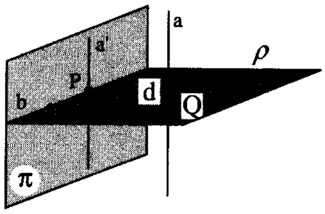
7. Problème de la perpendiculaire commune à deux droites gauches

Pour construire la perpendiculaire commune à deux droites gauches a et b :

- **On choisit un point P de b**
- **On construit par P, la droite a' parallèle à la droite a et on considère le plan π déterminé par les droites b et a'**
- **On construit par P, la droite d' perpendiculaire au plan π et on considère le plan ρ déterminé par les droites b et d'**



- **On détermine Q, le point de percée de la droite a dans le plan ρ et on trace, par Q et dans ρ, la droite d parallèle à la droite d'**



La droite **d** ainsi trouvée est la perpendiculaire commune aux deux droites gauches a et b

Puisque la perpendiculaire commune à deux droites gauches existe et est unique, on définit la distance de deux droites gauches comme étant la mesure de la longueur du segment délimité par les deux droites gauches sur leurs perpendiculaire commune.

Applications:

1. Trouve la perpendiculaire commune aux droites gauches
$$a \equiv x-1=\frac{y-1}{2}=\frac{1-z}{3} \text{ et } b \equiv 2x=2y=-z$$
En déduire la distance entre ces deux droites

2. Trouve la perpendiculaire commune aux droites gauches
$$a \equiv x-1=\frac{y}{3}=z+1 \text{ et } b \equiv \frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=z+3$$
En déduire la distance entre ces deux droites

8. Symétrie orthogonale par rapport à un plan

La symétrie orthogonale par rapport au plan π est la transformation qui laisse tous les points de π invariants et qui, à tout point P non situé sur π, associe le point P' tel que π soit le plan médiateur de [PP']

Applications:

1. Trouve l'image du point $(0,0,1)$ par rapport à la symétrie orthogonale par rapport au plan $x+y+z+2=0$
2. Trouve l'image du point $(1,0,1)$ par rapport à la symétrie orthogonale par rapport au plan $2x-y-z+2=0$

Exercices récapitulatifs:

1. On donne le point P(1,2,3) et le plan $\alpha \equiv -2x + 3y + 5z = 0$.
Détermine les équations cartésiennes et paramétriques de la perpendiculaire au plan α par P.
Détermine le pied de cette perpendiculaire dans le plan α.
Déduis-en la distance entre le point P et le plan α.

2. On donne les deux plans : $\alpha_1 \equiv 2x - y + 3z +1 = 0$
$\alpha_2 \equiv -4x + 2y - 6z +2 = 0$
Vérifie que ces deux plans sont parallèles non confondus.
Choisis un point quelconque de α_1 . Détermine l'équation de la perpendiculaire au plan α_1 passant par ce point. Calcule le point de percée de cette droite dans α_2 .
Déduis-en la distance entre ces deux plans.

3. On donne le point P(1,2,3) et la droite $d \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = z$.
Donne l'équation du plan α perpendiculaire à d par P.
Détermine le point de percée de la droite d dans le plan α.
Déduis-en la distance entre P et d.

4. On considère les deux droites
$$d_1 \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{2-z}{4}$$
$$d_2 \equiv \frac{x-3}{4} = \frac{y-1}{-6} = \frac{-z}{8}$$
Vérifie que ces deux droites sont strictement parallèles.
Choisis un point P quelconque de d_1.
Ecris l'équation du plan α perpendiculaire à d_1 par P.
Détermine le point de percée de d_2 dans ce plan α.
Déduis-en la distance entre les deux droites.

5. On donne la droite $d \equiv 2x = 3 - x = \frac{2z}{3}$ et le plan $\alpha \equiv 2x + 4y + 2z + 12 = 0$.
Vérifie que cette droite est strictement parallèle à ce plan.
Choisis un point P quelconque de d.
Etablis l'équation de la perpendiculaire à α par P.
Détermine le point de percée de cette perpendiculaire dans α.
Déduis-en la distance entre d et α.

6. On donne le plan $\alpha \equiv 2x+3y-z+7=0$
a) Montre que les points P(0 ;0 ;7) et Q(1 ;0 ;9) appartiennent au plan α
b) Etablis l'équation du plan β comprenant P et Q et perpendiculaire à α
c) Détermine l'équation de la droite à l'intersection des plans α et β.

7. Soit d_1 la droite par (0 ;0 ;7) et (-2 ;-3 ;8) et $d_2 \equiv \frac{x}{6} = \frac{y-4}{5} = \frac{7-z}{3}$
Etudie la position relative de ces deux droites. Si elles sont sécantes, détermine les coordonnées du point à l'intersection de ces droites

8. Soit le plan $\alpha \equiv 2x+3y+5z+5=0$ et le point P(5 ;7 ;8)
a) Vérifie que le point P n'appartient pas au plan α
b) Détermine les coordonnées du point de percée de la perpendiculaire à α par P.
c) Déduis-en la distance de P à α. Explique ton raisonnement.

9. On donne le plan $\alpha \equiv x-3y+5z+32=0$
a) Détermine l'équation du plan β parallèle à α passant par le point (1 ;1 ;1)
b) Détermine l'équation de la droite d perpendiculaire à β par le point (1 ;1 ;1)
c) Détermine l'intersection de cette droite d avec le plan α.
d) Déduis-en la distance entre les plans α et β. Explique ton raisonnement.

10. Soit la droite d_1 d'équation $x-2 = \frac{y}{2} = \frac{z-4}{3}$ et $d_2 \equiv \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6}$
a) Vérifie que ces droites sont parallèles non confondues.
b) Choisis un point de d_2
c) Donne l'équation du plan perpendiculaire à d_2 par ce point
d) Recherche les coordonnées du point de percée de d_1 dans ce plan
e) Déduis-en la distance entre les deux droites