CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

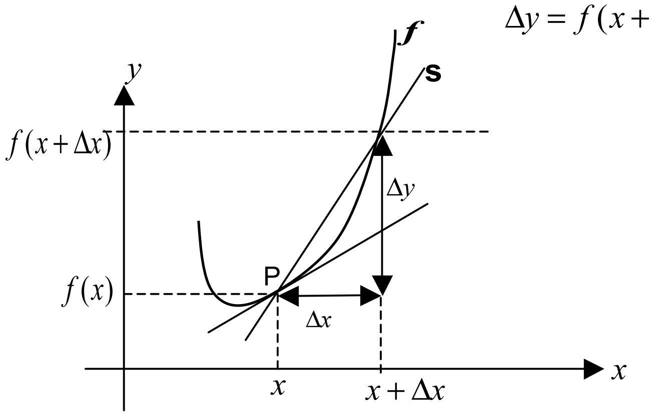
Chapitre 1 : Les primitives

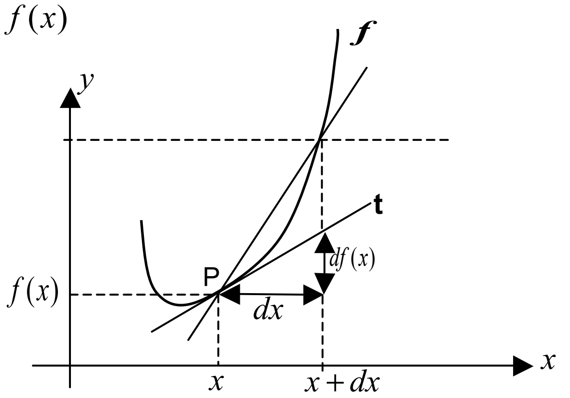
A. Notion de différentielle

1. Définition

Considérons une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ et son graphique.
A un accroissement arbitrairement choisi Δx, correspond un accroissement Δy

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$





$\Delta y \cong df(x)$ pour Δx suffisamment petit $(\Delta x \to 0)$

La droite *t* tangente au graphique de la fonction f au point *P* a pour coefficient de direction

$$m_t = \frac{df(x)}{dx}$$

La droite *s* sécante au graphique de la fonction f a pour coefficient de direction :

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Par définition, on a

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Prenons un même accroissement de *x* : $\Delta x = dx$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{\Delta y}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

Donc

$$\boxed{f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{d'où} \quad df(x) = f'(x).dx}$$

où $df(x)$ est appelée la **différentielle** de la fonction f

2. Calculs de différentielles

La différentielle dy peut être calculée au moyen des règles obtenues à partir des règles de dérivation.

Exemples

$d(u.v) = u.dv + v.du$ car $d(u.v) = (u.v)'\,dx = u'dx.v + u.v'dx$

$d(\sin x) = \cos x \; dx$

$d(\ln x) = \frac{1}{x}\; dx$

$d(x^3 + x^2) = (3x^2 + 2x)\,dx$

De quelle fonction $\cos x\, dx$ est-elle la différentielle ?

Exercices

De quelle fonction $e^x dx$ est-elle la différentielle ?

De quelle fonction $\frac{1}{1+x^2}dx$ est-elle la différentielle ?

Que vaut la différentielle de 3x²-2x ?

Que vaut la différentielle de sin2x?

Application : calcul approché

$\Delta y \cong df(x)$pour Δx suffisamment petit $(\Delta x \to 0)$

$$f(x+\Delta x) - f(x) \cong f'(x).dx$$

$$f(x+\Delta x) \cong f(x) + f'(x).dx$$ (pour Δx suffisamment petit $(\Delta x \to 0)$

Exercices sur la notion de différentielle

1. Donne une approximation de la valeur de $\sqrt{101}$, $\sqrt[3]{124}$, $\sin(60°1')$ sans l'aide de la calculatrice
2. En utilisant la différentielle, montre que lorsque h est petit, $1+\frac{h}{2}$ est une bonne approximation de $\sqrt{1+h}$
3. En utilisant la différentielle, estime le nombre de volume de peintures (en litres) nécessaire pour recouvrir un cube de 10 dm de côté avec une couche de peinture de 0,001 dm.
4. On mesure le rayon d'une sphère et on obtient 21 cm, avec une erreur possible maximale de 0,05 cm. A 'aide de la différentielle :
   a) estime l'erreur maximale que cette mesure peut engendrer sur le calcul du volume de la sphère
   b) trouve l'erreur relative correspondante

   Aide : volume d'une sphère=$\frac{4\pi}{3}R^3$, erreur relative=$\frac{\Delta V}{V} = \frac{dV}{V}$

B. Notion de primitive

1. Définition[1]

Une primitive d'une fonction *f* est une fonction *F* dont la dérivée est *f*.

$$\boxed{F \text{ est une primitive de } f \text{ si et seulement si } F' = f}$$

Exemples

x^2	est une primitive de	$2x$	car	$\left(x^2\right)' = 2x$
$\frac{x^3}{3}$	est une primitive de	x^2	car	$\left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2$
$\ln\lvert x\rvert$	est une primitive de	$\frac{1}{x}$	car	$\left(\ln\lvert x\rvert\right)' = \frac{1}{x}$
x^2+5	est une primitive de	$2x$	car	$\left(x^2+5\right)' = 2x$
$\sin x$	est une primitive de	$\cos x$	car	$\left(\sin\ x\right)' = \cos\ x$

2. Théorèmes

Théorème 1

Si F est une primitive de f et C une constante réelle, alors $F+C$ est aussi une primitive de f.

Théorème 2

Si F est une primitive de f et C une constante réelle, alors toute primitive est de la forme $F+C$.

Exemple

Les primitives de $2x$ sont x^2+C

3. Intégrale indéfinie

L'intégrale indéfinie de f, notée $\int f(x)\,dx$, est l'ensemble des primitives de f.

$$\boxed{\int f(x)\,dx = F(x) + C}$$

Pour intégrer, il existe diverses méthodes. Nous en étudierons quelques unes :

Intégration immédiate
Intégration par décomposition
Intégration par substitution
Intégration par parties
Intégration par changement de variable

---

[1] Par abus de langage on écrira parfois *f(x)* au lieu de *f* et *F(x)* au lieu de *F*, notamment pour les exemples, cette remarque restant valable pour les chapitres suivants d'analyse.

C. Méthodes d'intégration

Dans ce chapitre et les suivants, nous supposerons que les conditions d'existence sont toutes remplies.

1. Intégrations immédiates

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad , \quad n \neq -1$$

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|\, x\,| + C$$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} \; x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x + C$$

2. Intégration par décomposition

Considérons deux fonctions deux fonctions continues u et v, ainsi que deux réels *a* et *b*.
On a

$$\int (a\,u + b\,v)dx = a\int u\,dx + b\int v\,dx$$

Exemples

1. $\int \left(x^3 + 3x - \sin x\right)dx = \int x^3\,dx + 3\int x\,dx - \int \sin x\,dx = \frac{x^4}{4} + 3\frac{x^2}{2} + \cos x + C$

2. $\int (3\cos x - e^x)\,dx = 3\int \cos x \; dx - \int e^x \, dx = 3\sin x - e^x + C$

3. $\int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}} \; dt = \int \frac{1-2t+t^2}{t^{\frac{1}{2}}} \; dt = \int t^{-\frac{1}{2}} \; dt - 2\int t^{\frac{1}{2}} \; dt + \int t^{\frac{3}{2}} \; dt = \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \; - \; 2 \; \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \; + \; \frac{t^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C$

$$= 2 \; t^{\frac{1}{2}} - \frac{4}{3} \; t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5} \; t^{\frac{5}{2}} + C = 2 \; \sqrt{t} \; \left(1 - \frac{2t}{3} + \frac{t^2}{5}\right) + C$$

4. $\int (1+3x)^2 \; dx = \int (1+6x+9x^2)\,dx = \int dx + 6\int x\,dx + 9\int x^2\,dx = x + 6\frac{x^2}{2} + 9\frac{x^3}{3} + C$

$$= x + 3x^2 + 3x^3 + C$$

5. $\int (x+2)(x-4)\,dx = \int \left(x^2 - 2x - 8\right)dx = \int x^2 dx - 2\int x\,dx - 8\int dx = \frac{x^3}{3} - x^2 - 8x + C$

En général $\int \text{u.vdx} \neq \int \text{udx}.\int \text{uvdx}$

3. Intégration par substitution

Exemples

1. $\int (3x^2+1)^{10}\ 5x\ dx$

Posons $3x^2+1=t$

ce qui entraîne $6x\,dx = dt$ et $x\,dx = \dfrac{dt}{6}$

$$\int (3x^2+1)^{10} 5x \quad dx \;=\; \frac{5}{6}\;\int t^{10} \quad dt \;=\; \frac{5}{6}\;\frac{t^{11}}{11}+C \;=\; \frac{5}{6}\cdot\frac{(3x^2+1)^{11}}{11}+C$$

2. $\int \sin^3 x.\cos x\ dx$

Posons $\sin x = t$

ce qui entraîne $\cos x\ dx = dt$

$$\int \sin^3 x.\cos x\ dx = \int t^3\ dt \;=\; \frac{t^4}{4}+C \;=\; \frac{\sin^4 x}{4}+C$$

3. $\int e^{x^3} .3x^2\ dx$

Posons $x^3 = t$

ce qui entraîne $3x^2\ dx = dt$

$$\int e^{x^3} .3x^2\ dx \;=\; \int e^t\ dt \;=\; e^t + C \;=\; e^{x^3} + C$$

4. $\int \dfrac{2x}{x^2+9}\ dx$

Posons $x^2+9=t$

ce qui entraîne $2x\,dx = dt$

$$\int \frac{2x}{x^2+9}\ dx \;=\; \int \frac{dt}{t} \;=\; \ln|\,t\,|+C \;=\; \ln|\,x^2+9\,|+C$$

EXERCICES - I° série : Calculez les intégrales suivantes

1) $\int -15 \ dx$

2) $\int 5x^2 \ dx$

3) $\int \frac{8z^2}{\sqrt[4]{z}} \ dz$

4) $\int \left(-7x^3 + \frac{3x^2}{4} - \sqrt{\pi} \right) \ dx$

5) $\int \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{3}{x} + 2.8^x + e^{x+2} \right) dx$

6) $\int (4-t).(t^3+5) \ dt$

7) $\int \frac{u^3 + 5u^2 - 4}{u^2} \ du$

8) $\int \frac{(1-t)^2}{\sqrt{t}} \ dt$

9) $\int (2-v^2)^4 \ dv$

EXERCICES - II° série : Calculez les intégrales suivantes

1) $\int (2x^2 - x - 3).(4x-1) \ dx$

2) $\int (x^3-1)^7.x^2 \ dx$

3) $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+4} dx$

4) $\int \frac{2x+1}{x^2.(x+1)^2} dx$

5) $\int \frac{x+3}{\sqrt[3]{x^2+6x}} dx$

6) $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

7) $\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} dx$

8) $\int (x-2)^5 \ dx$

9) $\int \frac{dx}{(2x-1)^3}$

10) $\int 7.e^{2u-1} du$

11) $\int 3t.e^{5t^2} \ dt$

12) $\int (2\cos 3x - \sin(\pi.x+1) + e) dx$

13) $\int \frac{2x}{\cos^2(3x^2-1)} dx$

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

15) $\int \frac{1+\ln^3 t}{2t} \ dt$

16) $\int \frac{v+2}{v+1} dv$

17) $\int \frac{t^2+2t}{(t+1)^2} \ dt$

18) $\int \frac{1+\sin x}{\cos^2 x} \ dx$

4. Intégration par parties (première présentation)

Considérons deux fonctions *u* et *v* admettant des dérivées continues. On a

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{et} \quad uv' = (uv)' - u'v$$

ce qui entraîne

$$\int u.v'\,dx = \int (u.v)'\,dx - \int u'.v\,dx$$

$$\boxed{\int u.v'\,dx = u.v - \int u'.v\,dx}$$

Exemples

1. $\int x e^x \, dx$

On pose : $u = x$ alors $u' = 1$

$v' = e^x$ $\quad v = e^x$

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + C = e^x (x-1) + C$$

2. $\int x \cos x \, dx$

On pose : $u = x$ alors $u' = 1$

$v' = \cos x$ $\quad v = \sin x$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

3. $\int e^{2x} \cos 3x \, dx$

On pose : $u = \cos 3x$ alors $u' = -3 \sin 3x$

$v' = e^{2x}$ $\quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x - \int \frac{1}{2} e^{2x} (-3 \sin 3x) \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \int e^{2x} \sin 3x \, dx$$

Calculons $\int e^{2x} \sin 3x \, dx$

On pose : $u = \sin 3x$ alors $u' = 3 \cos 3x$

$v' = e^{2x}$ $\quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

$$\int e^{2x} \sin 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \int \frac{1}{2} e^{2x}\, 3 \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x \, dx$$

et $\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x - \frac{3}{2} \int e^{2x} \cos 3x \, dx \right)$

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \cos 3x + \frac{3}{4} e^{2x} \sin 3x - \frac{9}{4} \int e^{2x} \cos 3x \, dx$$

$$\left(1 + \frac{9}{4}\right) \int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x)$$

$$\frac{13}{4} \int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{4} e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x)$$

$$\int e^{2x} \cos 3x \, dx = \frac{1}{13} e^{2x} (2 \cos 3x + 3 \sin 3x) + C$$

5. Intégration par parties (deuxième présentation)

Considérons deux fonctions *u* et *v* admettant des dérivées continues. On a

$$d(u.v) = du.v + u.dv$$

et

$$\int d(u.v) = \int du.v + \int u.dv$$

$$u.v = \int u.dv + \int v.du$$

$$\boxed{\int u.dv = u.v - \int v.du}$$

$$\boxed{\int \mathrm{u.dv} = \mathrm{u.v} - \int \mathrm{v.du}}$$

Exemples

1. $\int xe^x dx$

On pose : $u = x$ alors $du = dx$

$dv = e^x dx$ $v = e^x$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

2. $\int x \cos x\,dx$

On pose : $u = x$ alors $du = dx$

$dv = \cos x\,dx$ $v = \sin x$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$$

3. $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$

On pose : $u = \cos 3x$ alors $du = -3\sin 3x\,dx$

$dv = e^{2x}dx$ $v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(-3\sin 3x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

Calculons $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$

On pose : $u = \sin 3x$ alors $du = 3\cos 3x dx$

$dv = e^{2x}dx$ $v = \frac{1}{2}e^{2x}$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{1}{2}e^{2x}3\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

et $\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x - \frac{3}{2}\int e^{2x}\cos 3x\,dx\right)$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x + \frac{3}{4}e^{2x}\sin 3x - \frac{9}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx$$

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$$

$$\frac{13}{4}\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x)$$

$$\int e^{2x}\cos 3x\,dx = \frac{1}{13}\,e^{2x}(2\cos 3x + 3\sin 3x) + C$$

EXERCICES - III° série : Calculez les intégrales suivantes

1) $\int x.e^{-x}dx$

2) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

3) $\int \ln x\,dx$

4) $\int x^3.\ln x\,dx$

5) $\int Arctgx\ \ dx$

6) $\int e^{2x}\cos x\,dx$

7) $\int e^x \sin x\,dx$

8) $\int (x+1)^2.e^{-x}\,dx$

9) $\int \frac{Arc\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

10) $\int (\ln x)^n dx\ (n \in IN_0)$

6. Intégration par changement de variable

Considérons une fonction f continue. Remplaçons x par $\varphi(t)$ où φ est une fonction admettant une dérivée continue. On a

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

Exemple 1

$\int \sqrt{1-x^2}dx$

Posons $x = \sin t$

ce qui entraîne $dx = \cos t\,dt$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \int \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt = \int \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,dt = \int \cos^2 t\,dt$$

$$= \int \frac{\cos 2t+1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \cos 2t\,dt + \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{2}t + C$$

$$= \frac{1}{2}\sin t\cos t + \frac{1}{2}t + C = \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}Arc\sin x + C$$

Exemple 2

$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

Posons $x = \frac{1}{t}$ alors $dx = -\frac{1}{t^2}dt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{-dt}{t^2\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int \frac{-dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\mathrm{Arc}\sin t + C = -\mathrm{Arc}\sin\frac{1}{x} + C$$

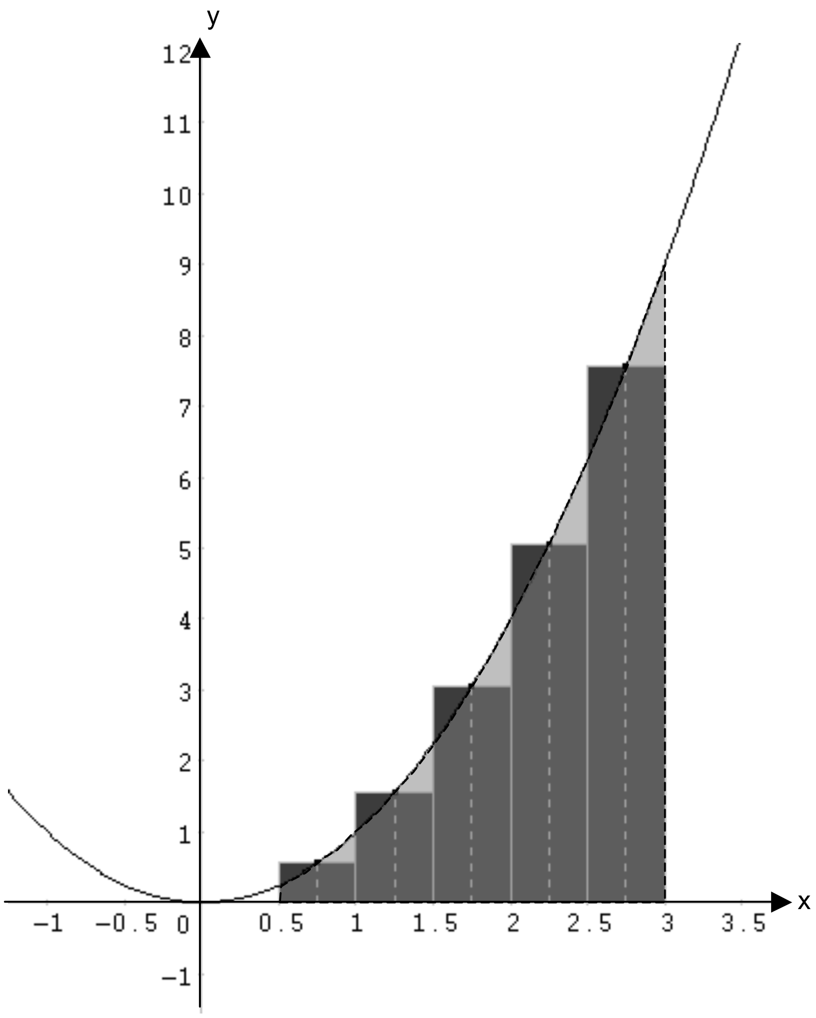
Chapitre 2. Les intégrales

A. Intégrale définie

1. Exemple introductif

Considérons la fonction $f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}\ :\ x\to x^2$

Calculons une valeur approchée de l'aire de la surface S délimitée par le graphique de la fonction f, l'axe Ox et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=3$.



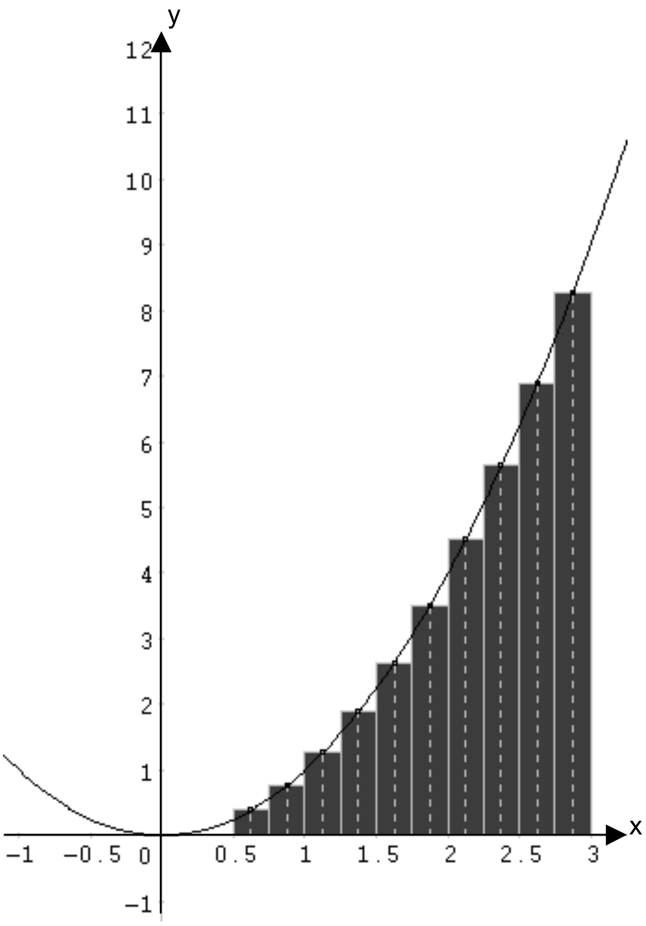
Partageons l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ en cinq intervalles de même longueur.

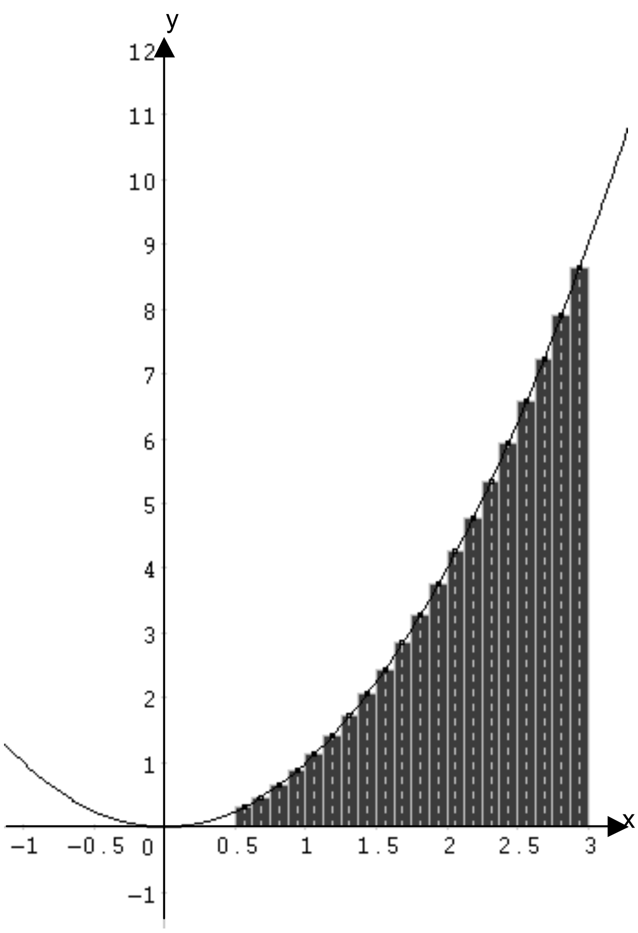
- Construisons cinq rectangles ayant un de ces intervalles comme base et comme hauteur la valeur que prend la fonction au milieu de la base.
- Calculons la mesure S_5 de la somme des aires des cinq rectangles.

$$S_5 = 0,5 \ . \ (0,75)^2 + 0,5 \ . \ (1,25)^2 + 0,5 \ . \ (1,75)^2 + 0,5 \ . \ (2,25)^2 + 0,5 \ . \ (2,75)^2 = 8,90625$$

On peut dire que S_5 est une valeur approchée de *S*.

Si on veut une meilleure approximation de *S*, il suffira de choisir une subdivision plus fine de l'intervalle de départ, c'est à dire des rectangles dont les bases seront de plus en plus petites.





On obtient

$$S_{10} = 8,9453125...$$

$$S20 = 8,955078...$$

Par le calcul intégral, on trouve

$$S = 0,958666...$$

2. Définitions d'une intégrale définie

1re définition

Considérons une fonction $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} \ : x \to f(x)$ continue et positive sur un intervalle $[a,b]$.

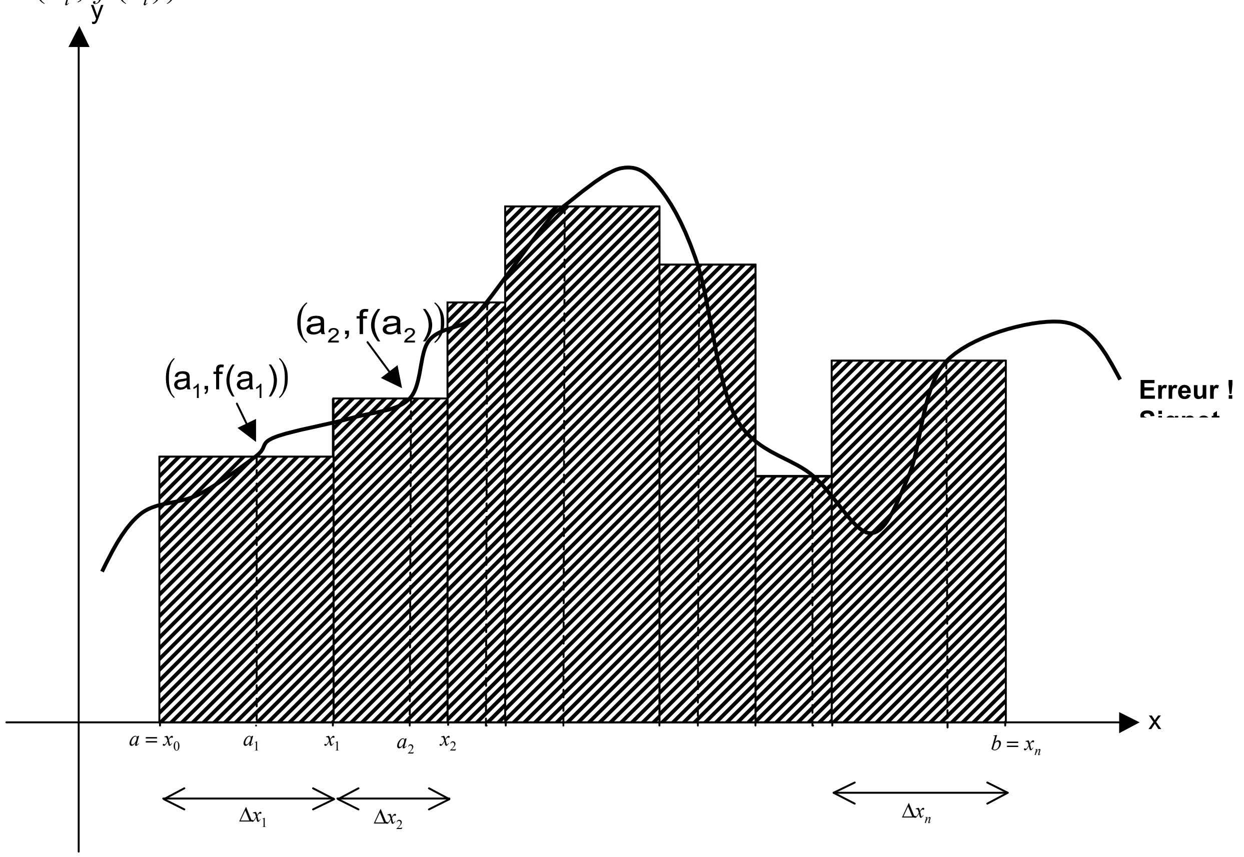
Partageons $[a,b]$ en n intervalles consécutifs tels que :

$$a = x_0 \ < \ x_1 \ < \ x_2 \ < \dots < \ x_{i-1} \ < \ x_i \ < \dots < \ x_n = b$$

Posons :

$$\begin{aligned}
\Delta x_1 &= x_1 - x_0 \\
\Delta x_2 &= x_2 - x_1 \\
&\vdots \\
\Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \\
&\vdots \\
\Delta x_n &= x_n - x_{n-1}
\end{aligned}$$

Dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, choisissons un nombre réel a_i et construisons le point $(a_i, f(a_i))$



Considérons la somme des aires des rectangles hachurés de base Δx_i et de hauteur $f(a_i)$

$$S_n = f(a_1)\Delta x_1 + f(a_2)\Delta x_2 + ... + f(a_i)\Delta x_i + ... + f(a_n)\Delta x_n$$

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i$$

- Choisissons une subdivision plus fine de l'intervalle de départ. La base Δx_i de chacun des rectangles tend vers 0. $(n \to \infty)$

- On peut démontrer que dans ces conditions, la somme S_n tend vers une limite finie qui est indépendante :
  - du choix des extrémités des intervalles,
  - du choix du nombre pris (a_i) dans chacun de ces intervalles.

On écrira : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(a_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

se lit : "intégrale définie de la fonction *f(x)* entre les bornes *a* et *b*".
a est la borne inférieure.
b est la borne supérieure.

Remarque
On peut généraliser cette expression à toute fonction continue sur $[a\,,\,b]$.

2[e] définition

Considérons une fonction $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R} : x \to f(x)$ continue et positive sur l'intervalle $[a,b]$.

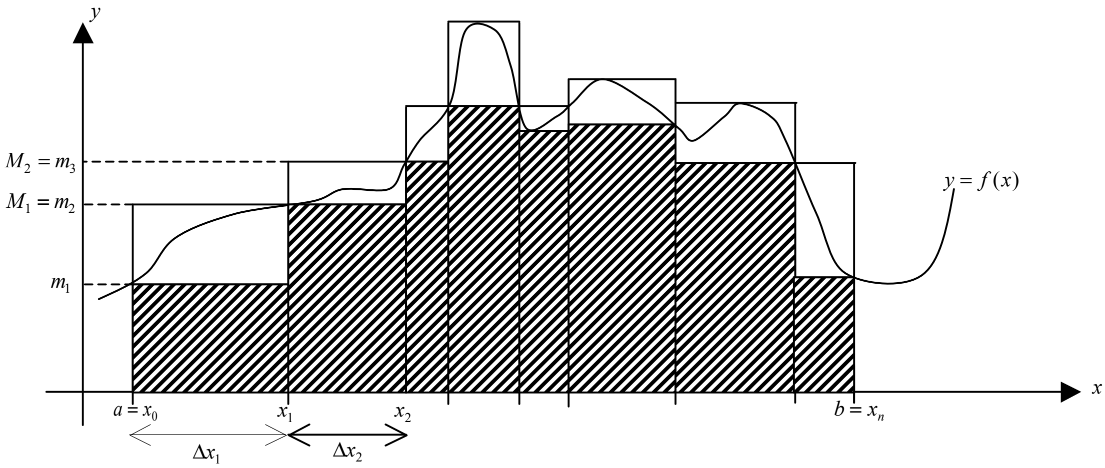
Partageons $[a,b]$ en n intervalles consécutifs tels que :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$$

Comme précédemment on pose

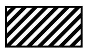
$\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, … , $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, … , $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$

Appelons m_i la borne inférieure de *f(x)* quand *x* varie dans l'intervalle $[x_{i-1}, x_i]$ et M_i sa borne supérieure dans le même intervalle.

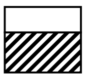


Considérons les sommes

$$s = m_1\,\Delta x_1 + m_2\,\Delta x_2 + ... + m_i\,\Delta x_i + ... + m_n\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i$$



$$S = M_1\,\Delta x_1 + M_2\,\Delta x_2 + ... + M_i\,\Delta x_i + ... + M_n\,\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$$

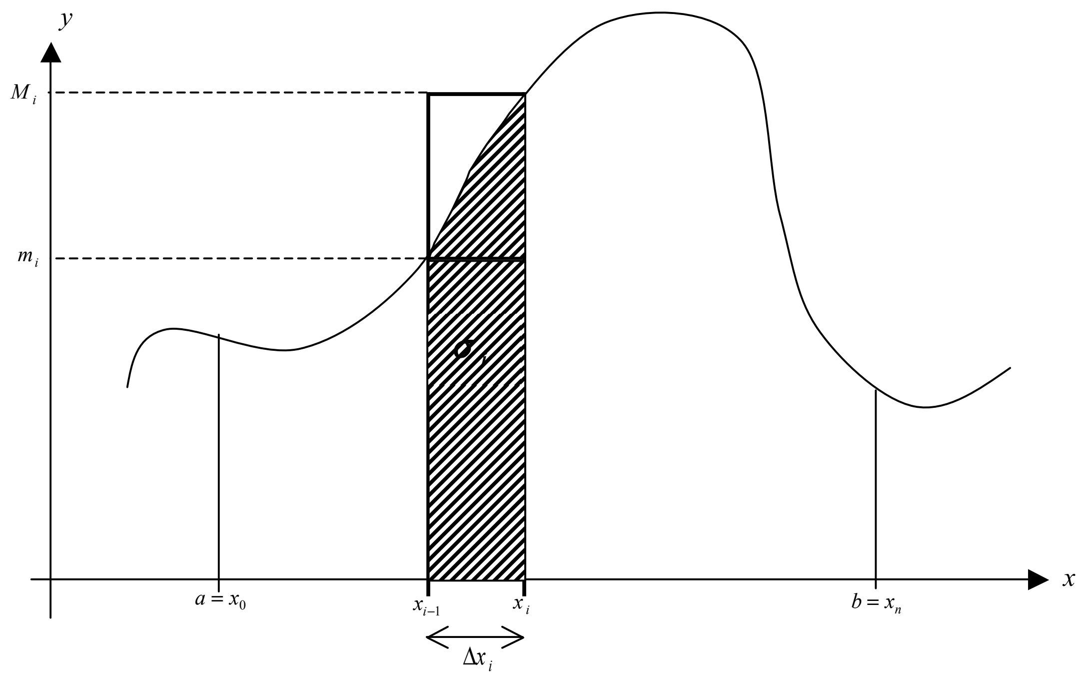


On peut démontrer que lorsque le nombre d'intervalles augmente indéfiniment $(n \to \infty)$, de sorte que les valeurs Δx_i tendent vers 0, les limites de *s* et de *S* existent et sont égales.
On désigne cette limite commune par

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$$

Agrandissement



L'aire σ_i de la surface hachurée est comprise entre les aires des deux rectangles de base Δx_i et de hauteurs respectives m_i et M_i.

$$m_i \Delta x_i \;\leq\; \sigma_i \;\leq\; M_i \Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad \Leftrightarrow \quad s \;\leq\; \sum_{i=1}^{n} \sigma_i \;\leq\; S$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \;\leq\; \underbrace{\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \sigma_i}_{\int_a^b f(x)\,dx} \;\leq\; \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

On peut montrer que ces deux définitions sont équivalentes.

Remarques

- $\int_a^b f(x)\,dx$ est un nombre réel qui représente l'aire de la surface délimitée par l'axe *Ox*, la courbe d'équation $y = f(x)$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$
- Le symbole $\int$ représente la première lettre du mot somme.
- $f(x)\,dx$ rappelle que les termes de la somme sont du type $f(a_i)\Delta x_i$.
- $\int_a^b f(x)\,dx$ est donc un nombre réel qui est la limite de la somme d'un nombre infiniment grand de termes infiniment petits.

3. Propriétés de l'intégrale définie

Considérons une fonction f continue sur l'intervalle fermé $[a,b]$.

a. L'intégrale définie ne dépend pas de la variable d'intégration.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt = \dots$$

b. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

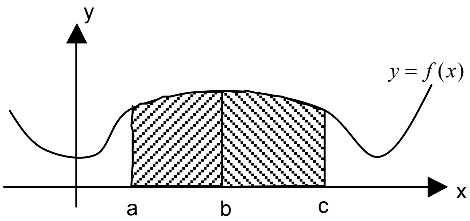
On considère la somme de *b* à *a* où les Δx_i ont changé de signe.

Remarque

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

c. Additivité

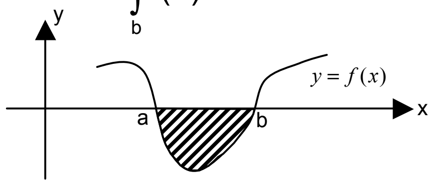
$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$



Remarque

Si la fonction f est négative, l'aire située entre la courbe et l'axe Ox est donnée par

$$-\int_b^a f(x)dx$$



d. Linéarité

$$\forall \lambda, \mu \in \boldsymbol{R} : \int_a^b [\ \lambda\ f(x) + \mu\ g(x)\ ]dx = \lambda \int_a^b f(x)\ dx + \mu \int_a^b g(x)\ dx$$

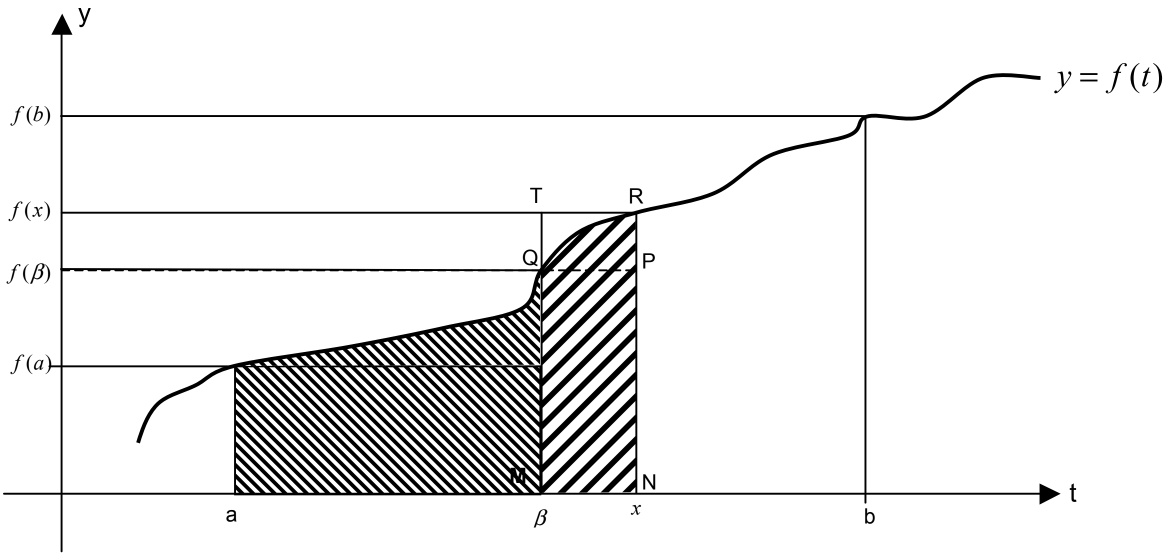
e. Positivité

$$\forall\ x \in [\ a\ ,\ b\ ]\ :\ f(x) \geq 0 \ \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq 0$$

$$\forall\ x \in [\ a\ ,\ b\ ]\ :\ f(x) \geq g(x) \ \Rightarrow \int_a^b f(x)\ dx \geq \int_a^b g(x)\ dx$$

B. Calcul d'une aire à l'aide d'une primitive

Considérons une fonction $f : \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}, t \rightarrow f(t)$ continue, croissante et positive dans l'intervalle $[a,b]$



Appelons $S(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ la mesure de l'aire de la surface délimitée par

$y = f(t)$, $t = a$, $t = x$, $y = 0$

$S(\beta) = \int_a^\beta f(t)\,dt$ la mesure de l'aire de la surface délimitée par

$y = f(t)$, $t = a$, $t = \beta$, $y = 0$

Intuitivement on a

Aire du rectangle *MNPQ* $\leq$ $S(x) - S(\beta)$ $\leq$ aire du rectangle *MNRT*

$$(x-\beta) f(\beta) \leq S(x) - S(\beta) \leq (x-\beta) f(x)$$

$$f(\beta) \leq \frac{S(x) - S(\beta)}{x - \beta} \leq f(x) \qquad x \neq \beta, x > \beta$$

et

$$\lim_{\substack{x \to \beta \\ >}} f(\beta) \leq \lim_{\substack{x \to \beta \\ >}} \frac{S(x) - S(\beta)}{x - \beta} \leq \lim_{\substack{x \to \beta \\ >}} f(x)$$

$$f(\beta) \leq S'(\beta) \leq f(\beta)$$

d'où

$$S'(\beta) = f(\beta)$$

et par généralisation

$$S' = f$$

S est donc une primitive de *f* et la fonction

$$x \rightarrow \int_a^x f(t)\,dt$$

est une primitive de *f*.

Rappel
F est une primitive de *f* si et seulement si *F' = f* et si *F* est une primitive de *f*, toute primitive de *f* est de la forme *F + C.*

On a donc

$$\int_a^x f(t)\,dt \quad \text{est une primitive de } f(x)$$

c'est-à-dire

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C$$

Lorsque $x = a$, on a successivement

$$\int_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$$

$$0 = F(a) + C$$

$$C = -F(a)$$

Lorsque $x = b$, on a successivement

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) + C$$

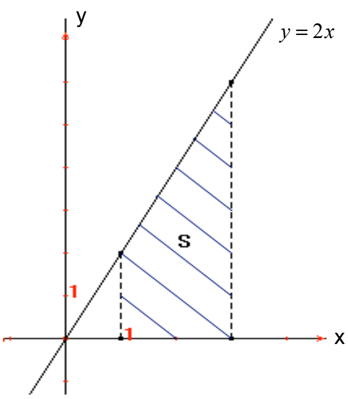
$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

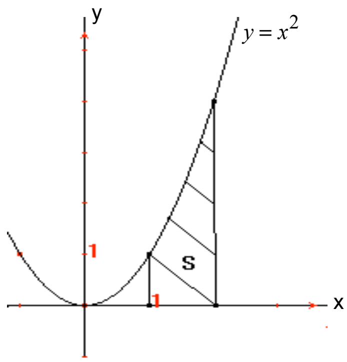
On notera

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$$

La détermination d'une intégrale définie se ramène donc à la détermination d'une primitive.
On peut généraliser cette expression à toute fonction continue sur $[a\,,b]$.

Exemples

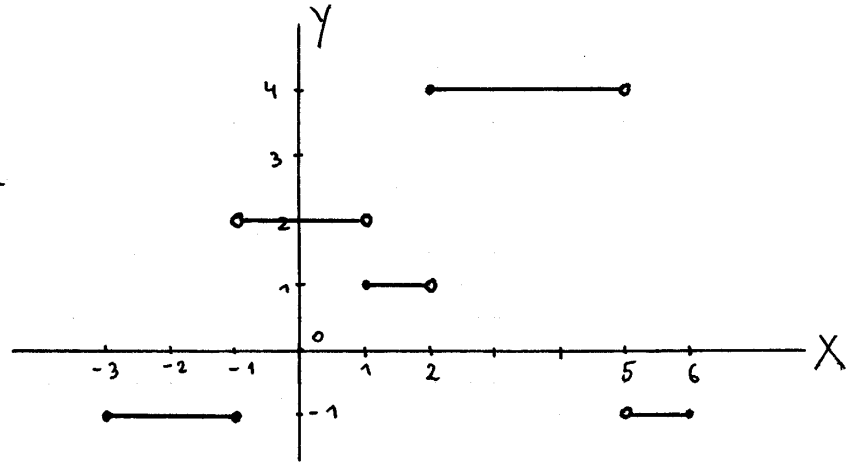




Exemples

Calculer les intégrales suivantes :

f_1 fonction en escalier sur $[-3; 6]$



1) $\int_{-3}^{6} f_1(x)dx =$

2) $\int_{3}^{6} f_1(x)dx =$

3) $\int_{-3}^{1} f_1(x)dx =$

4) $\int_{0}^{2} f_1(x)dx =$

5) $\int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$

6) $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 u \cos u \, du = \left[\frac{\sin^3 u}{3}\right]_{0}^{\pi/2} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$

7) $\int_{2}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t}\right]_{2}^{3} = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$

8) $\int_{0}^{1} \frac{\text{Arctg}x}{1+x^2} dx = \left[\frac{(\text{Arctg}x)^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{1}{2}\left((\text{Arctg}1)^2 - (\text{Arctg}0)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 = \frac{\pi^2}{32}$

<u>EXERCICES - IV° série</u>

Calculez les intégrales définies suivantes :

1) $\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} \sin 4x \, dx$ 2) $\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} |\sin 4x| \, dx$ 3) $\int_{-3\pi/4}^{3\pi/4} \sin |4x| \, dx$

4) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x.\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx$ 5) $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sin x.\cos x}{1+\sin^2 x} \, dx$

6) $\int_{-2}^{3} \lfloor x \rfloor dx$ 7) $\int_{1}^{6} \lceil x \rceil dx$ 8) $\int_{-2}^{2} \lceil |x| \rceil dx$

Intégration par parties de $\int_a^b f(x)dx$

La formule de l'intégration par parties s'étend aux intégrales définies :

Exemples :

$$\int_0^1 x\, e^{3x} dx = \left[x.\frac{1}{3}e^{3x}\right]_0^1 - \int_0^1 1.\frac{1}{3}e^{3x}dx = \left(\frac{1}{3}e^3 - 0\right) - \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3x}dx = \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}\left[e^{3x}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{9}(e^3 - 1)$$

Intégration par substitution de $\int_a^b f(x)dx$

La formule de l'intégration par substitution s'adapte aux intégrales définies **à condition** d'exprimer les bornes en fonction de la nouvelle variable :

Exemples :

$\int_0^1 x.(x-1)^4 dx = I$ On pose x-1=t

Changement de bornes

Si x=1, alors t=0
Si x=0, alors t= -1

L'intégrale devient :

$$I = \int_{-1}^0 (t+1).t^4 dt = \int_{-1}^0 (t^5 + t^4)dt = \left[\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5}\right]_{-1}^0 = 0 - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{30}$$

EXERCICES - V° série

Calculez les intégrales définies suivantes :

1) $\int_{-2}^{-1} \frac{t-2}{t^2-4t+3}dt$

2) $\int_{-2}^{-1} \frac{t-2}{(t^2-4t+3)^2}dt$

3) $\int_{\pi/4}^{0} tgu.(1+tg^2u)du$

4) $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\cos y}{\sin^2 y}dy$

5) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2).Arctgx}$

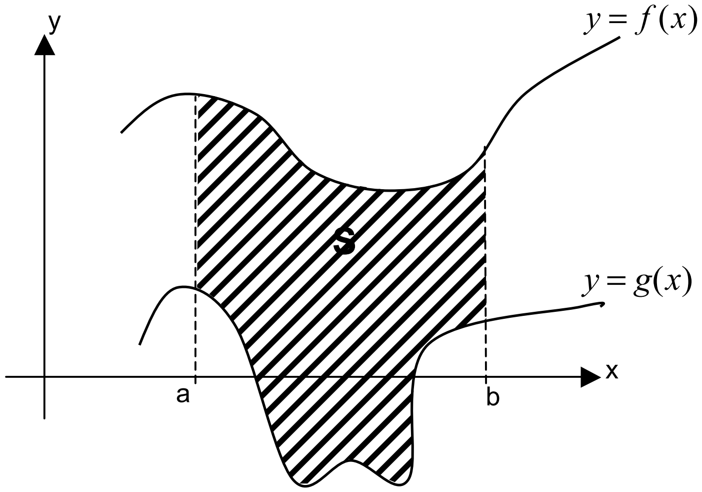
6) $\int_{\sqrt{7/2}}^{\sqrt{7}} \frac{t}{\sqrt{1-\frac{t^4}{49}}}dt$

Chapitre 3. Applications de l'intégrale définie
Calculs d'aires et de volumes

A. Calculs d'aires

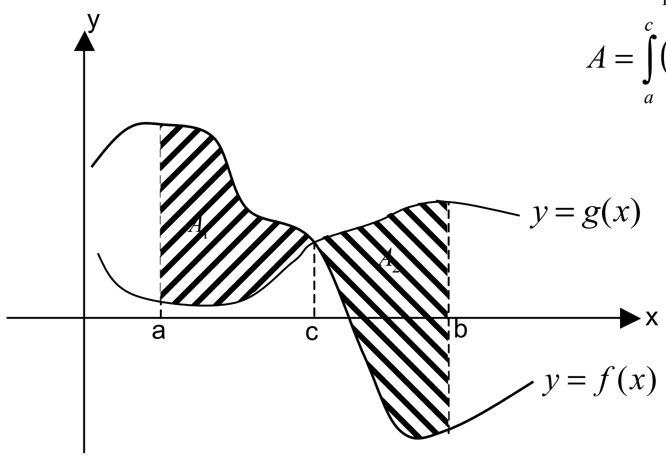
Considérons deux fonctions f et g continues dans l'intervalle $[a,b]$.
Supposons que $\forall x \in [a,b],\ g(x) \le f(x)$.
L'aire de la surface délimitée par
le graphique de f et le graphique de g
les droites $x = a$ et $x = b$
est donnée par

$$\boxed{S = \int_a^b \left(f(x) - g(x)\right) dx}$$



Cas où les graphiques se coupent dans l'intervalle $[a, b]$
Alors on sépare le calcul d'aire en deux nouveaux calculs d'aire

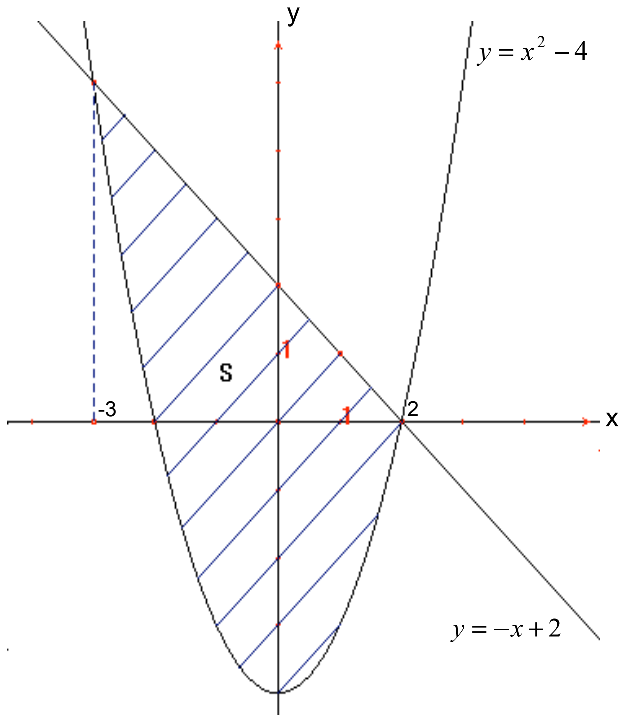
$$A = A_1 + A_2$$
$$A = \int_a^c \left(f(x) - g(x)\right) dx + \int_c^b \left(g(x) - f(x)\right) dx$$



Exemple 1

Calculer l'aire de la surface délimitée par

- la droite $d \equiv\ y = -x + 2$
- la parabole $P \equiv\ y = x^2 - 4$



Les abscisses des points d'intersection de la droite et de la parabole sont

$$x^2 - 4 = -x + 2$$
$$x^2 + x - 6 = 0$$
$$x = -3 \quad , \quad x = 2$$

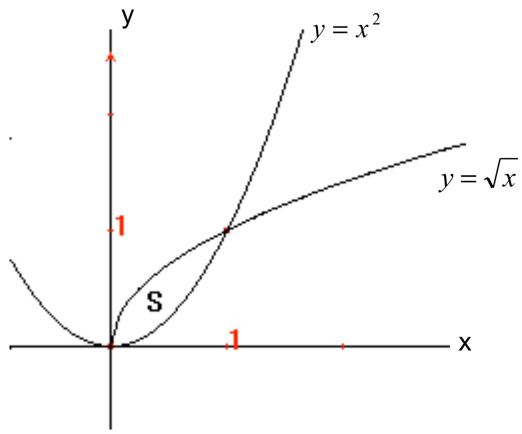
Dans l'intervalle $[-3, 2]$, on a :

$$-x + 2 \geq x^2 - 4$$

$$S = \int_{-3}^{2} \left[(-x+2) - (x^2 - 4)\right] dx$$
$$= \int_{-3}^{2} \left(-x^2 - x + 6\right) dx$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x\right]_{-3}^{2}$$
$$= -\frac{8}{3} - 2 + 12 - \left(9 - \frac{9}{2} - 18\right) = \frac{125}{6}$$

Exemple 2

Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes $y = x^2$ et $y = \sqrt{x}$.



Les abscisses des points d'intersection des deux courbes sont

$$x^2 = \sqrt{x}$$
$$x^4 = x \ \text{ et } \ x \geq 0$$
$$x^4 - x = 0$$
$$x(x^3 - 1) = 0$$
$$x = 0 \quad , \quad x = 1$$

Dans l'intervalle $[0, 1]$, on a : $\sqrt{x} \geq x^2$

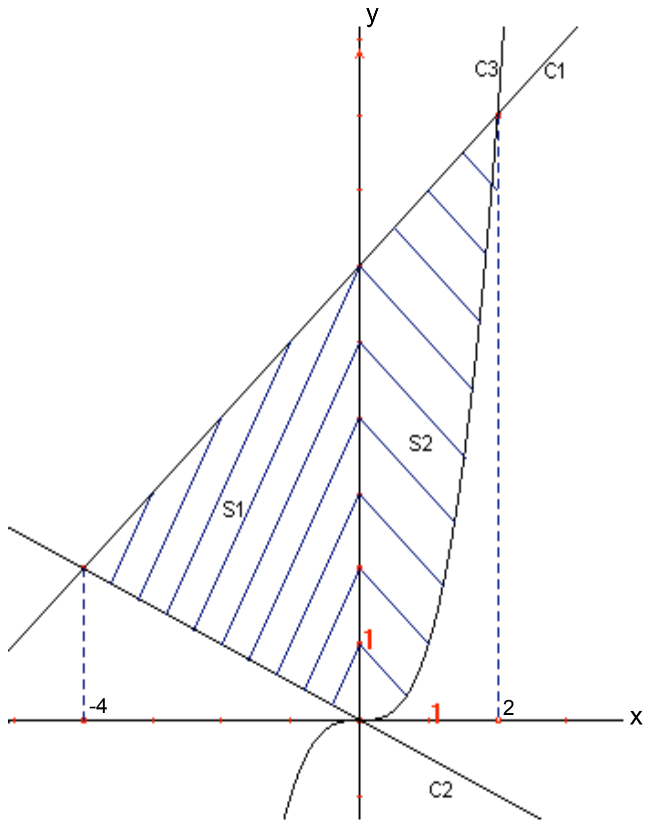
$$S = \int_{0}^{1} \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Exemple 3

Calculer l'aire de la surface délimitée par les courbes $C_1 \equiv y = x+6$, $C_2 \equiv 2y+x=0$ et $C_3 \equiv y-x^3=0$

Les abscisses des points d'intersection des courbes sont :

Entre C_1 et C_2 :



$$y = x+6 \text{ et } y = -\frac{1}{2}x$$
$$x+6 = -\frac{1}{2}x$$
$$x = -4$$

Entre C_2 et C_3 :

$$y = -\frac{1}{2}x \text{ et } y = x^3$$
$$-\frac{1}{2}x = x^3$$
$$x = 0$$

Entre C_1 et C_3 :

$$y = x+6 \text{ et } y = x^3$$
$$x+6 = x^3$$
$$x^3 - x - 6 = 0$$
$$(x-2)(x^2+2x+3) = 0$$
$$x = 2$$

Dans l'intervalle $[-4,0]$

$$S_1 = \int_{-4}^{0}\left[(x+6)-\left(-\frac{1}{2}x\right)\right]dx$$
$$= \int_{-4}^{0}\left(\frac{3}{2}x+6\right)dx = \left[\frac{3}{4}x^2+6x\right]_{-4}^{0} = 0-\left(\frac{3}{4}.16-24\right) = 12$$

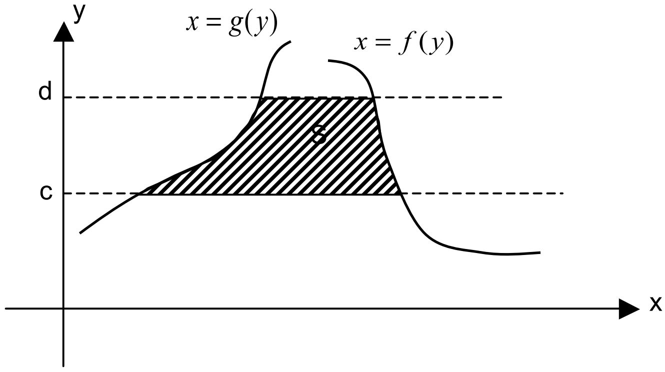
Dans l'intervalle $[0,2]$

$$S_2 = \int_{0}^{2}\left[(x+6)-(x^3)\right]$$
$$= \int_{0}^{2}\left(-x^3+x+6\right)dx = \left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+6x\right]_{0}^{2} = \left(-\frac{16}{4}+\frac{4}{2}+12\right) = 10$$

D'où : $S = S_1 + S_2 = 12+10 = 22$.

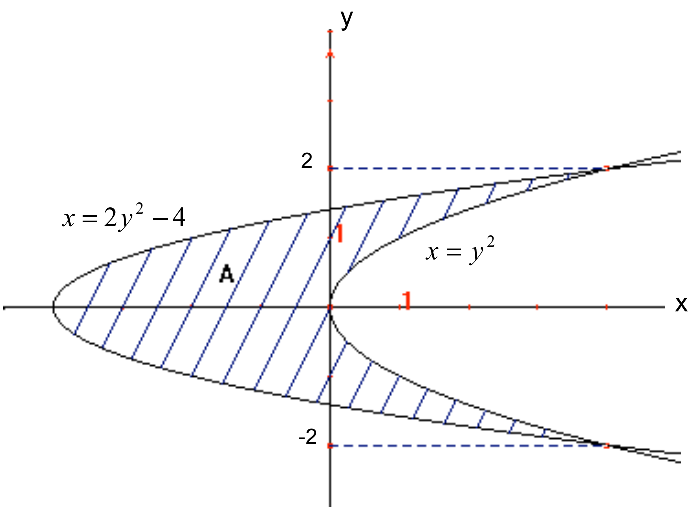
Équations de la forme : $\boldsymbol{x = f(y)}$

f est continue dans l'intervalle $[c,d]$
Il suffit d'intervertir les rôles de *x* et de *y.*



$$S = \int_c^d \left(f(y) - g(y)\right)dy$$

Exemple
Calculer l'aire de la surface délimitée par les graphiques des fonctions d'équations : $2y^2 = x+4$ et $y^2 = x$



Bornes de l'intégrale :

$$x = 2y^2 - 4 \text{ et } x = y^2$$
$$2y^2 - 4 = y^2$$
$$y^2 = 4$$
$$y = 2 \text{ et } y = -2$$

Dans l'intervalle $[-2,2]$, on a :

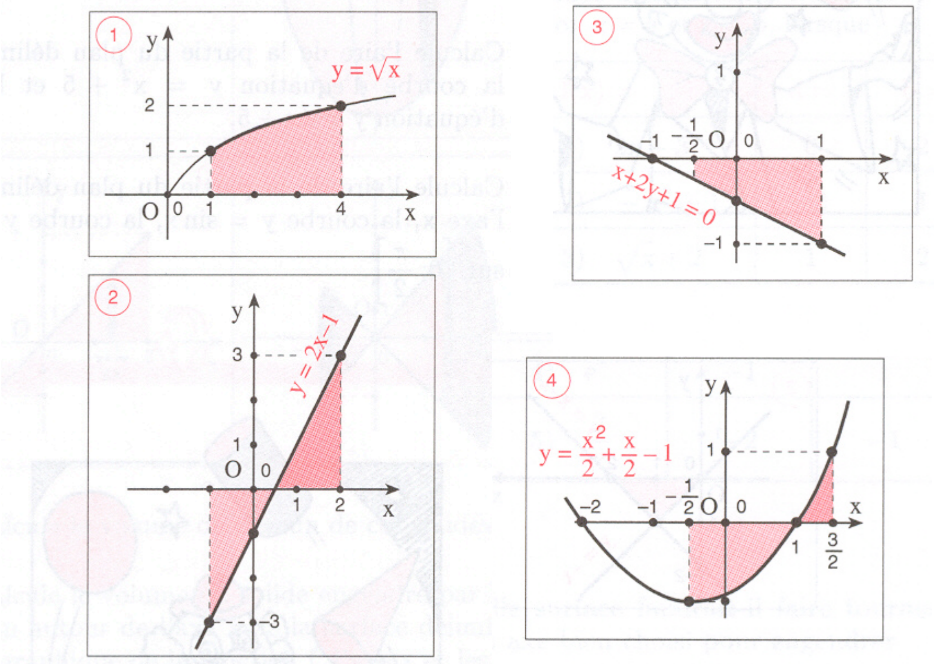
$$y^2 \geq 2y^2 - 4$$

$$A = \int_{-2}^{2}\left[\left(y^2\right) - (2y^2 - 4)\right]dx$$

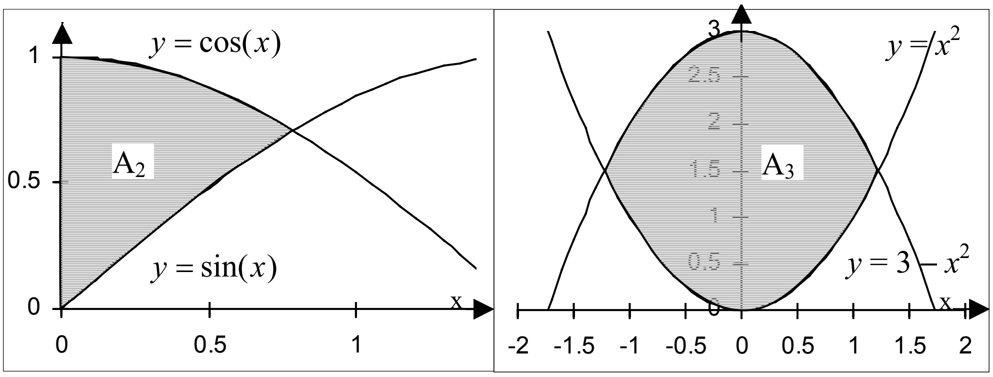
$$= \int_{-2}^{2}\left(-y^2 + 4\right)dy = \left[-\frac{y^3}{3} + 4y\right]_{-2}^{2} = -\frac{8}{3} + 8 - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = \frac{32}{3}$$

EXERCICES - VI° série

1) Trouve une ou plusieurs intégrales définies dont la valeur ou la différence des valeurs est égale à l'aire de la partie coloriée du plan. Calcule ensuite cette aire.



2) Calcule les aires grisées ci-dessous.
Au préalable, tu dois déterminer les intersections des courbes !



3) Calcule l'aire de la partie d'un plan délimitée par les courbes d'équation $f(x) = 4 - x^2$, l'axe X et les droites d'équations x = 2 et x = - 1.
(Même question avec les droites d'équations x = - 3 et x = 3)

4) Calcule l'aire de la partie d'un plan délimitée par les courbes d'équation $f(x) = e^x$, l'axe X et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

5) Calcule l'aire de la partie d'un plan délimitée par les courbes d'équation $f(x) = x^2 - 3x$, l'axe X et les droites d'équations x = 1 et x = 3.

6) Calcule l'aire de la surface limitée par les courbes d'éq. $y = x^2 - 4$ et $y = - x + 2$

7) Calcule l'aire de la surface limitée par les courbes d'éq. $y = - x^2 + 2$ et $y = x^2 - 4$

8) Calcule l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes d'équation :
$4y^2 = x$ et $x-2y-2=0$.
Effectue d'abord une représentation graphique. Détaille ton raisonnement pour déterminer les intersections de ces deux courbes et pour calculer l'aire à l'aide d'intégrales.

B. Les solides de révolution

Un solide de révolution est un volume engendré par la rotation d'une région du plan autour d'une droite

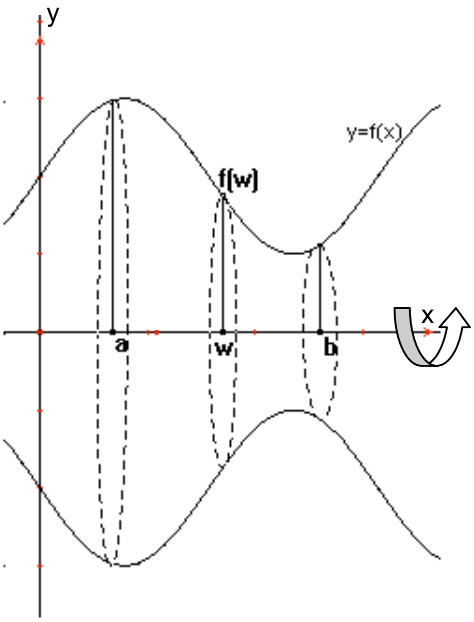


Figure 1

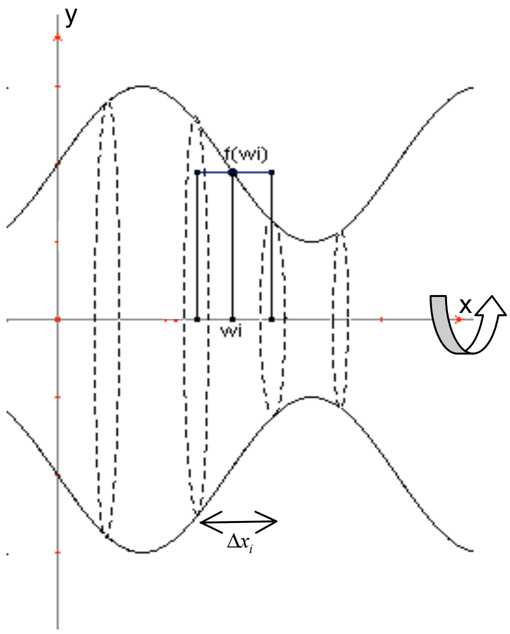


Figure 2

Prenons un découpage de l'intervalle $[a, b]$ et construisons sur chaque sous-intervalle un rectangle. La rotation de ces rectangles autour de l'axe Ox engendre le solide de révolution de la figure 2. Chaque rectangle engendre un cylindre de rayon de base $f(w_i)$ et de hauteur (épaisseur) $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Le volume de chaque cylindre est le produit de sa base par sa hauteur : $V_i = \pi\left[f(w_i)\right]^2 .\Delta x_i$

La somme des volumes de ces cylindres est $\sum_i V_i = \sum_i \pi\left[f(w_i)\right]^2 .\Delta x_i$

Le volume est donc

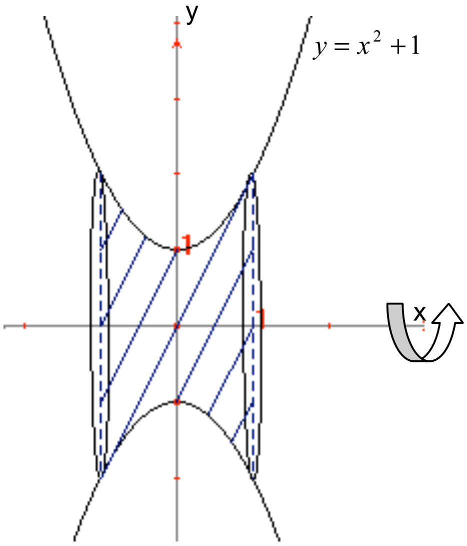
$$\boxed{V = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2\, dx}$$

Remarques

1. f ne doit pas être nécessairement positive.
2. En intervertissant les rôles de *x* et de *y*, on obtient un solide de révolution engendré par une rotation autour de l'axe Oy. Dans ce cas, on a

$$V = \int_c^d \pi\left(g(y)\right)^2\, dy .$$

Exemple 1
Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la région comprise entre la courbe d'équation $y = x^2 + 1$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$



$$V = \int_{-1}^{1} \pi.(x^2 + 1)^2 dx$$

En utilisant la symétrie, on obtient

$$V = 2\pi.\int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx$$

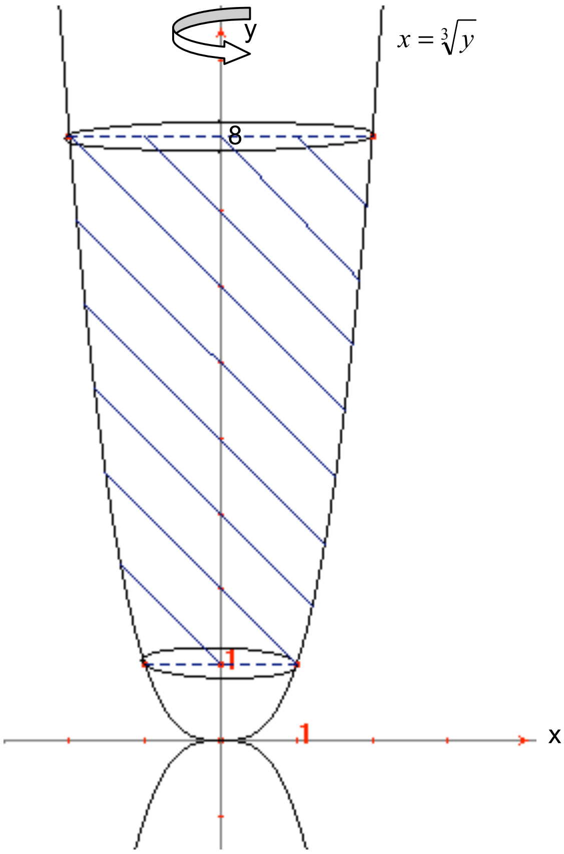
$$V = 2\pi.\int_0^1 (x^4 + 2x^2 + 1)dx$$

$$V = 2\pi.\left[\frac{x^5}{5} + 2.\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1$$

$$V = 2\pi.\left(\frac{1}{5} + 2.\frac{1}{3} + 1\right)$$

$$V = \frac{56\pi}{15}$$

Exemple 2
Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe Oy de la région comprise entre l'axe Oy et les graphiques des fonctions d'équations $y = x^3$, $y = 1$ et $y = 8$



De $y = x^3$, on déduit $x = \sqrt[3]{y} = y^{\frac{1}{3}}$

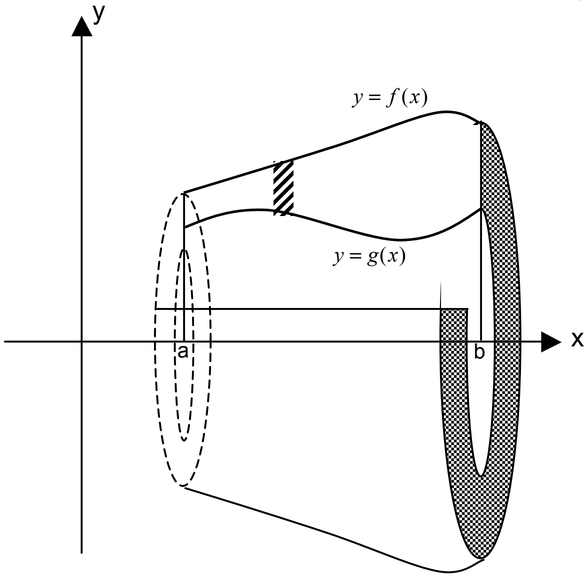
$$V = \int_1^8 \pi.y^{1/3} dy$$

$$V = \pi.\int_1^8 y^{1/3} dy = \pi.\left[\frac{y^{4/3}}{4/3}\right]_1^8$$

$$V = \pi.\left[\frac{3.y^{4/3}}{4}\right]_1^8 = \frac{3\pi}{4}\left[y^{4/3}\right]_1^8$$

$$V = \frac{3\pi}{4}.\left(8^{4/3} - 1\right) = \frac{45\pi}{4}$$

Considérons maintenant la révolution d'une région comprise entre deux courbes, autour de l'axe *Ox*
Le solide de révolution résulte de la différence entre le solide engendré par la plus grande région ($f(x)$) et celui engendré par la plus petite ($g(x)$)



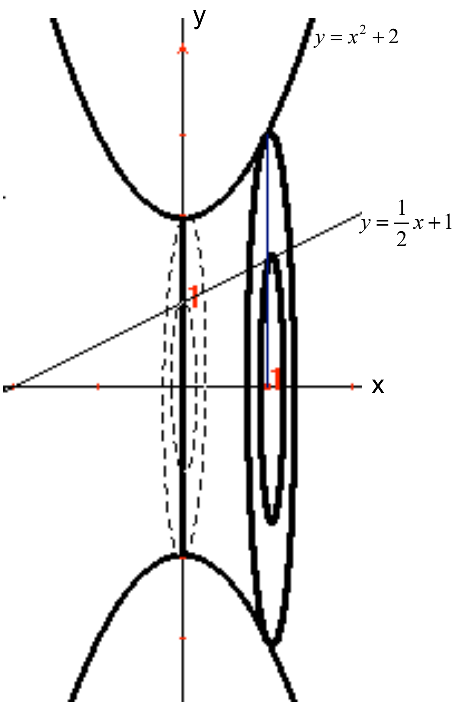
$$V = \int_a^b \pi\left[f(x)\right]^2 dx - \int_a^b \pi\left[g(x)\right]^2 dx$$

$$V = \int_a^b \pi\left[f^2(x) - g^2(x)\right]dx$$

En pratique : $\boxed{V = \pi\left[(\text{rayon exterieur})^2 - (\text{rayon interieur})^2\right].\text{Épaisseur}}$

Exemple 3

Calculer le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de Ox de la région délimitée par les fonctions d'équations $x^2 = y - 2$ et $2y - x - 2 = 0$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$



Dans l'intervalle $[0,1]$, on a

$$x^2 + 2 \geq \frac{1}{2}x + 1$$

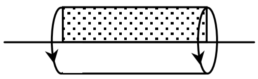
$$V = \pi\int_0^1\left[\left(x^2+2\right)^2 - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)^2\right]dx$$

$$= \pi\int_0^1\left[x^4 + 4x^2 + 4 - \frac{x^2}{4} - x - 1\right]dx$$

$$= \pi\int_0^1\left(x^4 + \frac{15}{4}x^2 - x + 3\right)dx$$

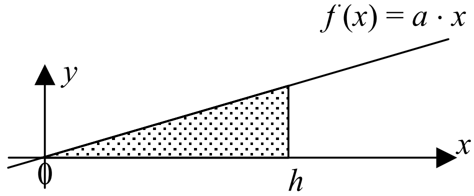
$$= \frac{79\pi}{20}$$

EXERCICES - VII° série



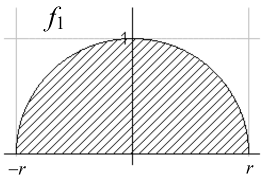
1) Le cylindre est un solide de révolution.
En effet, en faisant tourner un rectangle autour de l'un de ses côtés, on obtient un cylindre.
Trouve une intégrale définie dont la valeur vaut le volume d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h. Calcule ce volume.

2) Le cône est également un solide de révolution.
En faisant tourner un triangle autour de l'un de ses côtés, on obtient un cône.
Trouve une intégrale définie dont la valeur vaut le volume d'un cylindre de base de rayon R et de hauteur h. Calcule ce volume.

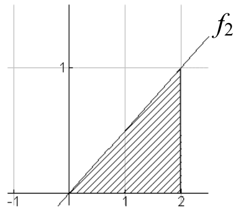


3) Les surfaces hachurées ci-dessous engendrent des solides de révolution lorsqu'on les fait tourner autour de l'axe x. Dessine pour chaque cas le solide obtenu et calcule son volume de révolution.

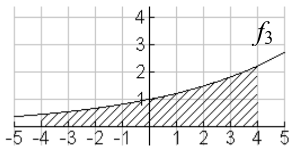
$f_1(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$



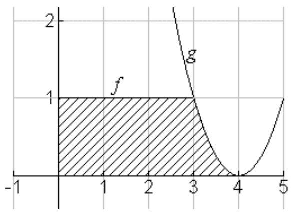
$f_2(x) = \frac{1}{2}x$



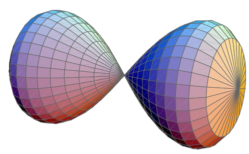
$f_3(x) = e^{x/5}$



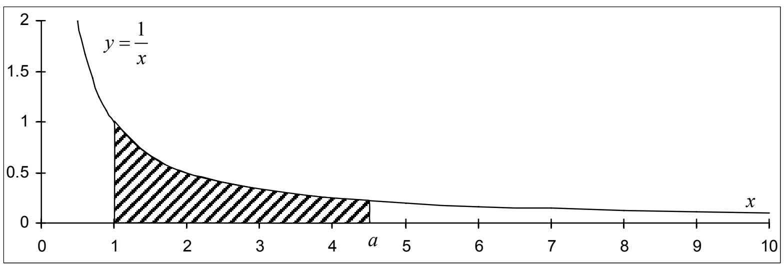
$f(x) = 1$ et
$g(x) = (x-4)^2$



4) Calcule le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x de la courbe d'équation $y = \sqrt{x^2 - x^4}$, pour x variant entre -1 et 1.



5) a) Calcule le volume du solide de révolution engendré par la rotation autour de l'axe des x de la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$, pour x variant entre 1 et a.



b) Vers quel nombre tend ce volume si a tend vers l'infini ?
c) Quelle est l'aire de la surface hachurée ?
d) Vers quelle limite tend cette aire si a tend vers l'infini ?

6) Un mur rectangulaire de 12 m de long et 6 m de haut est percé d'une porte ayant la forme d'un rectangle surmonté d'un arc parabolique.
Calcule la quantité de peinture à employer pour repeindre le mur sachant que :

a) une seule couche de peinture est nécessaire
b) on ne peint pas la porte
c) il faut 1 litre de peinture pour couvrir une surface de 10 m^2.