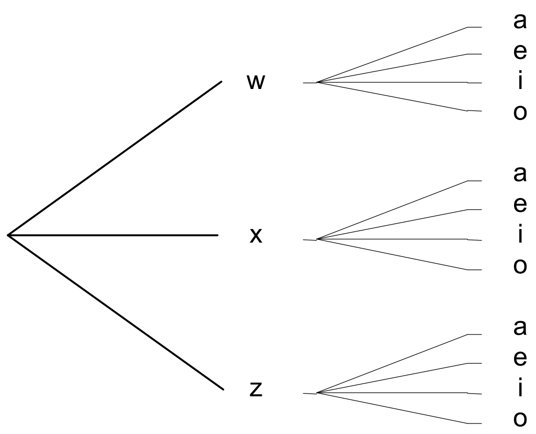
ANALYSE COMBINATOIRE

Chapitre 1. Quelques activités de dénombrement

1. Comptage par produits

Combien peut-on former de mots de deux lettres (ayant un sens ou non) dont la première appartient à l'ensemble $\{w,x,z\}$ et la deuxième est une voyelle de l'ensemble $\{a,e,i,o\}$?



Il y a 3×4 mots formés en prenant, dans l'ordre, une lettre dans $\{w,x,z\}$ et une lettre dans $\{a,e,i,o\}$.

Il y a donc 12 mots demandés.

2. Comptage par sommes et différences

Sur l'autoroute E411, on a compté en une journée 3526 voitures allant de Bruxelles à Arlon et 2241 voitures allant de Arlon à Bruxelles. Combien de voitures différentes sont passées par cette autoroute quand on sait que 226 ont fait l'aller-retour ?

Nombre de voitures ayant emprunté l'autoroute E411 : $3526+2241=5767$

Nombre de voitures comptées deux fois : 226

Nombre de voitures différentes ayant emprunté l'autoroute E411 : $5767-226=5541$

3. Comptage par sommes de produits

Une urne contient 3 boules bleues et 5 vertes. On tire au hasard 2 boules sans remise (c'est à dire que la première boule n'est pas remise dans l'urne après le tirage) et on regarde la couleur des boules tirées. Combien y a-t-il de possibilités d'obtenir au moins une boule bleue ?

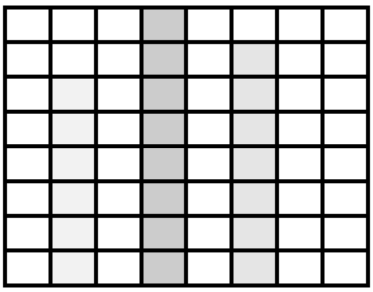
Il y a 2 possibilités de groupements pour obtenir au moins une boule bleue : 1 bleue et 1 verte ou 2 bleues.
Nombre de possibilités de tirer le premier groupement : $3 \times 5 = 15$
Nombre de possibilités de tirer le deuxième groupement : $\frac{3.2}{2} = 3$
Nombre de possibilités de tirer au moins 1 bleue : $15 + 3 = 18$

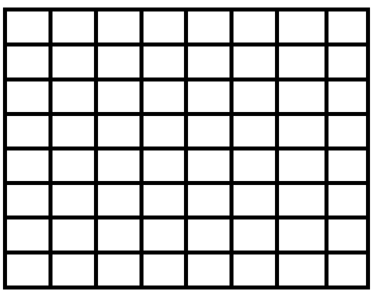
4. Exemples

Exemple 1
La compagnie Math Air propose chaque jour 4 vols sur la ligne Bruxelles-Nice. La compagnie Mathema propose chaque jour 3 vols sur la ligne Bruxelles-Nice. De combien de façons peut-on voler chaque jour de Bruxelles à Nice? La réponse est évidemment 7 car on ne peut voler simultanément dans un avion de Math Air et de Mathema.

Exemple 2
De combien de manières distinctes peut-on disposer 8 tours sur un échiquier de façon à ne pas avoir deux tours sur une même ligne ou sur une même colonne ?
Un jeu d'échec comporte 8 x 8 = 64 cases.
Une tour peut se déplacer le long d'une ligne ou d'une colonne et prendre toute pièce qu'elle trouve sur son chemin.

Plaçons une tour sur la première ligne : on a huit choix possibles.





- ensuite, plaçons une autre tour sur la deuxième ligne : on a sept choix possibles (on ne peut pas mettre de tour dans la même colonne que la première).
  On a donc 8 x 7 choix possibles de cases pour ces deux tours.
- ensuite, plaçons une autre tour sur la troisième ligne : on a six choix possibles.

  On a donc 8 x 7 x 6 choix possibles de cases pour ces trois tours.
- On continue jusqu'à ce que les huit tours soient placées. On aura donc 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 40320 choix possibles pour placer ces 8 tours.

Exemple 3

Un glacier décide de réarranger chaque jour ses vingt parfums différents de glace pour déterminer la présentation qui maximisera ses ventes. Combien de jours lui faudra-t-il pour épuiser toutes les possibilités ?

Pour la première place on a 20 choix possibles. Quand elle est occupée, il reste 19 choix possibles pour la deuxième place. Une fois la deuxième place occupée, il demeure 18 choix possibles pour la troisième place et ainsi de suite jusqu'à la dernière place qui est automatiquement remplie par la glace restante.

Il faudra donc 20 x 19 x 18 x ... x 4 x 3 x 2 x 1 = 2.432.902.008.176.640.000 jours ce qui fait 6 10^{15} années à notre marchand pour réaliser son projet, c'est à dire 6 millions de milliards d'années. Sachant que l'âge de l'univers est d'environ 13 milliards d'années, imaginez le nombre de générations futures nécessaires à l'accomplissement de ce projet.

Notion de factorielle

On a donc vu que si le glacier possède *n* parfums et *n* bacs à glace, il est amené à faire le produit des nombres naturels de 1 à *n*. Ce produit porte le nom de factorielle de *n* et s'écrit *n*!

Définition

La <u>factorielle d'un nombre</u> naturel non nul est le produit de tous les nombres naturels non nuls égaux ou inférieurs à ce nombre naturel.

$$\boxed{n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \qquad \forall n \in \mathrm{N}_0}$$

Par convention

$$\boxed{0! = 1}$$

Propriété

$$\boxed{\forall n \in N_0 : \; n! = n.(n-1)!}$$

Chapitre 2. Analyse combinatoire

♦ Remarque

Puisque l'on effectue des comptages, les nombres *n* et *p* utilisés dans la suite sont des entiers strictement positifs.

1. Arrangements avec répétitions

♦ Exemple

Tous les mots de 2 lettres que l'on peut former avec les lettres a, b et c sont :

$$\begin{array}{ccc} aa & ba & ca \\ ab & bb & cb \\ ac & bc & cc \end{array}$$

Ce sont les **arrangements avec répétitions de 2 lettres choisies parmi 3** : il y en a 9. En effet, à chacun des 3 choix pour la première lettre correspondent encore 3 choix pour la deuxième lettre.

$$\alpha_3^2 = 3^2 = 9$$

♦ Définition

On considère un ensemble de *n* éléments.

Un arrangement avec répétitions de *n* éléments pris *p* à *p* est une sélection ordonnée de *p* éléments différents ou non choisis parmi n éléments différents. On désigne par α_n^p le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments choisis parmi n.

♦ Remarque

Deux groupes diffèrent soit par la nature des éléments qui y figurent, soit par leur **ordre.**

♦ Calcul de α_n^p

Chacun des p éléments peut être choisi de n façons différentes : $\alpha_n^p = n^p$

Exercices:

1. Combien de nombre de 4 chiffres peut-on écrire en utilisant les chiffres de 1 à 9 ?

2. En morse, les mots sont écrits avec un alphabet de deux symboles ─ et ●.
Combien peut on former de mots de 5 lettres dans cet alphabet ?

2. Arrangements sans répétition

♦ Exemple

Tous les mots de 2 lettres **différentes** que l'on peut former avec les 4 lettres a, b, c et d sont

$$\begin{array}{cccc} ab & ba & ca & da \\ ac & bc & cb & db \\ ad & bd & cd & dc \end{array}$$

Ce sont les **arrangements sans répétition de 2 lettres prises parmi 4** : il y en a 12. En effet, à chacun des 4 choix pour la première lettre correspondent 3 choix pour la deuxième lettre.

$$A_4^2 = \underbrace{4.3}_{2 \text{ facteurs}} = 12$$

♦ Définition

On considère un ensemble de *n* éléments.

Un arrangement sans répétition de *n* éléments pris *p* à *p* est une sélection ordonnée de *p* éléments différents ($p \leq n$) choisis parmi n éléments différents. On désigne par A_n^p le nombre d'arrangements sans répétition de *p* éléments choisis parmi n.

♦ Remarque

Deux groupes diffèrent soit par la nature des éléments qui y figurent, soit par leur **ordre.**

♦ Calcul de A_n^p

On considère les n éléments $x_1, x_2, ..., x_n$

Le 1er élément peut être choisi de *n* façons différentes.
Le 2^{e} élément peut être choisi de *n*-1 façons différentes.
Le 3^{e} élément peut être choisi de *n*-2 façons différentes.
$\vdots$
Le $p^{ième}$ élément peut être choisi de *n*-*p*+1 façons différentes.

$$A_n^p = n(n-1)(n-2)...(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

A_n^p est le produit de *p* naturels décroissants successifs à partir de *n.*

Exercices:

1. Combien de paris différents pouvez-vous faire pour un tiercé lorsqu'il y a 15 chevaux ?

2. Combien de nombres de 4 chiffres différents peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5, 6 ?
Même question mais on demande que les nombres se terminent par 3.
Même question mais on demande que les nombres soient pairs.

3. De combien de manières peut-on colorier une carte représentant trois pays, disposant de sept couleurs? (couleurs différentes pour pays différents)

4. Combien peut-on écrire de "mots" de 4 lettres avec les lettres du mot "**ARGENT**".

3. Permutations

♦ Exemple

Tous les mots de 3 lettres **différentes** que l'on peut former avec les 3 lettres *a*, *b*, *c* sont : $abc, acb, bac, bca, cab, cba$. Ce sont les **permutations de 3 lettres** : il y en a 6. En effet, à chacun des 3 choix pour la première lettre correspondent 2 choix pour la deuxième et 1 choix pour la troisième lettre.

$$P_3 = 3! = 6$$

♦ Définition

On considère un ensemble de *n* éléments.

Une permutation est une disposition ordonnée de *n* éléments différents. On désigne par P_n le nombre de permutations de n éléments.

♦ Remarque

Une permutation est un cas particulier d'arrangement. Une permutation de n éléments est un arrangement sans répétition de n éléments choisis parmi n.

♦ Calcul de P_n

$$P_n = A_n^n \Rightarrow P_n = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1 = n!$$

4. Permutations avec répétitions[1]

♦ Exemple

Combien de mots différents peut-on former avec les 5 lettres du mot $LILLE$? Dans un premier temps on numérote les 3 lettres L pour les distinguer : les permutations des lettres $L_1IL_2L_3E$ sont au nombre de 5! Si on supprime les indices, il y a 3! façons différentes de placer les 3 lettres L pour avoir le même mot (c'est-à-dire : $L_1IL_2L_3E$ et $L_2IL_3L_1E$ sont les mêmes mots).

Il y aura donc $P_3^5 = \dfrac{5!}{3!} = 20$ mots différents possibles.

♦ Définition

On désigne par $P_n^{p_1, p_2, \ldots, p_k}$ le nombre de permutations de n éléments parmi lesquels il y en a p_1 semblables, p_2 semblables, ..., p_k semblables.

♦ Calcul de $P_n^{p_1, p_2, \ldots, p_k}$

Déterminer le nombre de permutations des n objets suivants : $\underbrace{a, \ldots, a}_{p_1}, \underbrace{b, \ldots, b}_{p_2}, \ldots, \underbrace{f, \ldots, f}_{p_k}$

Si on individualise tous les n éléments il y a $n!$ permutations des ces n éléments.

---

[1] Hors programme.

Mais il y a $p_1!$ permutations des lettres a

$p_2!$ permutations des lettres b

… $\vdots$

$p_k!$ permutations des lettres f

Chaque permutation avec répétitions donne donc $p_1!.p_2!.\dots.p_k!$ fois plus de permutations sans répétition que de permutations avec répétitions.

$$P_n^{p_1,p_2,\dots,p_k}=\frac{n!}{p_1!.p_2!.\dots.p_k!}$$

<u>Exercices:</u>

1. On doit choisir un président, un vice-président, un secrétaire et un trésorier parmi quatre personnes. De combien de manières peut-on faire ce choix?

2. Combien peut-on former de mots de 6 lettres différentes avec les lettres du mot "**ARGENT**"?

3. Combien peut-on former de mots de 10 lettres avec les lettres du mot "**ARGENTERIE**"?

5. Combinaisons sans répétition

♦ Exemple

Soit l'ensemble $\{a,b,c,d,e\}$. Tous les sous-ensembles de 3 éléments que l'on peut former sont :

$$\{a,b,c\}\ \{a,b,d\}\ \{a,b,e\}\ \{a,c,d\}\ \{a,c,e\}\ \{a,d,e\}$$
$$\{b,c,d\}\ \{b,c,e\}\ \{b,d,e\}$$
$$\{c,d,e\}$$

Ce sont les combinaisons sans répétition de 3 lettres parmi 5 : il y en a 10. Dans cet exemple l'ordre n'a pas d'importance. Il y a donc 3! fois moins de combinaisons que d'arrangements de ces éléments car :

pour les combinaisons $\{a,b,c\}=\{a,c,b\}=\{b,a,c\}=\{b,c,a\}=\{c,a,b\}=\{c,b,a\}$

alors que pour les arrangements $abc\neq acb\neq bac\neq bca\neq cab\neq cba$

$$C_5^3=\frac{A_5^3}{3!}=\frac{5!}{3!.2!}=10$$

♦ Définition

On considère un ensemble de *n* éléments.

Une <u>combinaison</u> de *n* éléments pris *p* à *p* est une sélection de *p* éléments <u>différents</u> ($p\leq n$) choisis parmi n éléments différents.

♦ Remarque

Deux groupes ne diffèrent que par la nature des éléments qui y figurent.

♦ Calcul de C_n^p

On considère les C_n^p sous-ensembles de p éléments pris parmi n éléments. Si dans chacun des sous-ensembles on permute les p éléments, alors le nombre de groupes sera multiplié par $p!$ et on obtiendra les arrangements de ces n éléments pris p à p. Il y a donc $p!$ fois plus d'arrangements de n éléments pris p à p que de combinaisons de n éléments pris p à p.

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

♦ Propriétés

✓ Rappels : $n! = n(n-1)!$ et $0! = 1$

✓ $C_n^p = C_n^{n-p}$

Démonstration

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = C_n^{n-p}$$

✓ $C_n^0 = C_n^n = 1$

✓ $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Démonstration

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p &= \frac{(n-1)!}{(p-1)!\big((n-1)-(p-1)\big)!} + \frac{(n-1)!}{p!\big((n-1)-p\big)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} \\
&= \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)(n-p-1)!} \\
&= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{(n-1)!\big(p+n-p\big)}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p
\end{aligned}$$

Exercices:

1. Vous êtes 6 et vous recevez 2 entrées gratuites pour le cinéma. De combien de façons différentes pouvez-vous attribuer ces 2 entrées?

2. De combien de façons différentes peut-on choisir 6 nombres parmi les nombres de 1 à 42?

3. De combien de façons peut-on choisir un jury de 5 personnes parmi 3 femmes et 7 hommes?
Même question, mais il faut 2 femmes et 3 hommes dans le jury.

4. On donne dans le plan, quatre points non alignés trois à trois ? Combien de droites peut-on tracer, passant par deux de ces points ?

6. Exemples récapitulatifs

♦ Exemple 1

Quels sont tous les nombres de deux chiffres différents que l'on peut former avec les cinq chiffres suivants : 1, 2, 3, 4, 5 ?

12	13	14	15
21	23	24	25
31	32	34	35
41	42	43	45

On a 20 possibilités, en effet à chacun des cinq choix pour le premier chiffre correspondent quatre choix pour le second chiffre :

$$\underbrace{5 \text{x} 4}_{\text{2facteurs}} = 20.$$

C'est un *<u>arrangement sans répétition</u>* de 2 chiffres choisis parmi 5 : $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 5.4 = 20$

♦ Exemple 2

De combien de manières peut-on choisir un sous-ensemble de deux chiffres choisis parmi les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ?

{1,2}	{1,3}	{1,4}	{1,5}
	{2,3}	{2,4}	{2,5}
		{3,4}	{3,5}
			{4,5}

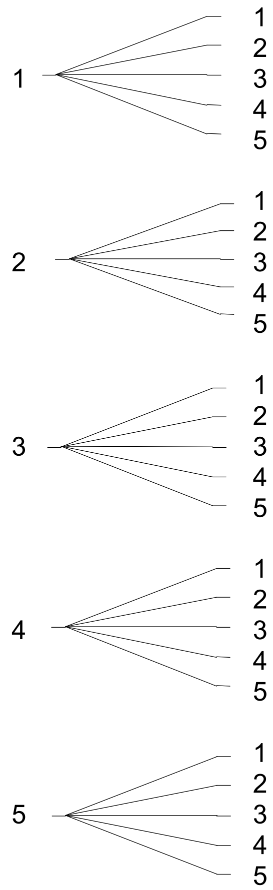
On a 10 possibilités

C'est une *<u>combinaison</u>* de 2 chiffres choisis parmi 5 : $C_5^2 = \frac{5!}{3!.2!} = \frac{5.4}{2} = 10$

♦ Exemple 3

Trouver tous les nombres de deux chiffres que l'on peut former avec 1, 2, 3, 4, 5.

11	12	13	14	15
21	22	23	24	25
31	32	33	34	35
41	42	43	44	45
51	52	53	54	55



On a 5 choix pour le chiffre des dizaines et,
ce chiffre étant choisi, 5 choix pour le chiffre des unités.
C'est-à-dire 5 x 5 = 5^2 choix possibles.

C'est un *arrangement avec répétitions* de 2 chiffres choisis parmi 5 : $\alpha_5^2 = 5^2 = 25$

EXERCICES RECAPITULATIFS

1. Calculer les réels suivants :

$$7!\ ;\ 7!-4!\ ;\quad (8\text{-}5)!\ ;\ \frac{18!}{(18-2)!}$$

2. Simplifier les expressions

$$\frac{n!}{(n-1)!}\ ;\ \frac{(n+2)!}{n!}\ ;\ \frac{(n-1)!}{(n+2)!}\ ;\ \frac{(n-r+1)!}{(n-r-1)!}\ ;\ \frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$$

3. Résoudre dans N :

$$1)\ A_n^2=72 \qquad 2)\ C_n^2=45n \qquad 3)\ C_{x+10}^{x+4}=C_{x+10}^{2x-1}$$

4. Un immeuble est composé d'un rez-de-chaussée et de 8 étages. Un ascenseur part du rez-de-chaussée avec 5 occupants.
   a) De combien de manières différentes ces 5 occupants peuvent-ils choisir les étages auxquels ils vont se rendre ?
   b) Même question si à chaque étage un occupant au plus quitte l'ascenseur ?
5. Le jeu de Cluedo consiste à retrouver l'assassin du Dr. Lenoir, l'arme et le lieu du crime. Sachant qu'il y a six armes, neuf lieux et six suspects, de combien de manières différentes le meurtre a-t-il pu être commis ?
6. Parmi un groupe de 10 membres :
   a) De combien de manière différentes peut-on former un groupe de 3 personnes pour effectuer un voyage ?
   b) même question mais Madame Chose refuse de partir en voyage avec Monsieur Bidule
   c) même question mais les jumeaux Mono et Zygote n'acceptent de participer au voyage que s'ils sont ensembles

7. Les plaques d'immatriculation belges sont constituées de 1 chiffre-indice + 3 lettres + 3 chiffres. L'indice a la signification suivante:
   indices **1** à **7** : plaques standard
   indice **8** : (**8-AAA-001** à **8-YZZ-999**) : plaques internationales
   indice **9** : plaques personnalisées de 6 ou 7 caractères, par exemple **9-FER-348** ou **9-B-1234**
   a) Combien de plaques d'immatriculation peut-on imprimer avec l'indice 1 ?
   b) Vous voulez une plaque personnalisée ! Avec le sigle AJB évidemment ! Combien existe-t-il de plaques de ce type ?

8. A l'aide des six chiffres : 2, 3, 5, 6, 7, 9 :
   - Combien de nombres de trois chiffres peut-on former ?
   - Combien de nombres de trois chiffres différents peut-on former ?
     (a) combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
     (b) combien de ces nombres sont inférieurs à 400 ?
     (c) combien de ces nombres sont supérieurs à 600 ?
     (d) combien de ces nombres sont pairs ?
     (e) combien de ces nombres sont impairs ?
     (f) combien de ces nombres sont des multiples de cinq ?

9. La serrure d'un cadenas se compose de trois anneaux portant chacun tous les chiffres de 0 à 9. De combien de façons peut-on tenter un essai pour ouvrir le cadenas ?

10. On considère 10 points A, B, C, … du plan, tel que trois d' entre eux ne sont jamais alignés.
    a) combien de droites sont engendrés par ces points?
    b) combien d'entre elles passent par A?
    c) combien d'entre elles ne passent pas par A et B?
    d) combien de triangles sont engendrés par ces points?
    e) combien d'entre eux comprennent le point A?
11. De combien de manières un enfant peut-il aligner 10 cubes de couleurs différentes ?
12. De combien de manières un enfant peut-il aligner 10 cubes dont 5 sont rouges, trois sont bleus et deux sont jaunes ?
13. De combien de manières peut-on placer 7 convives autour d'une table ronde de 7 places ?
14. De combien de manières peut-on placer 7 convives autour d'une table ronde de 7 places, si ces places sont numérotées ?
15. Combien peut-on former d'anagrammes du mot SALON si une voyelle ne peut prendre que la place d'une voyelle ?
16. Une façade comporte 6 fenêtres, chaque fenêtre est ouverte ou fermée. Combien y a-t-il de visions de la façade possibles ? combien y a-t-il de possibilités d'avoir exactement trois fenêtres ouvertes ? au moins trois fenêtres fermées ? au plus trois fenêtres fermées ?
17.
    a) Combien peut-on former de "mots" de deux lettres avec l'alphabet français ?
    b) Combien peut-on former de "mots" de deux lettres avec l'alphabet français si l'on veut que la première lettre soit une voyelle ?
    c) Combien peut-on former de "mots" de deux lettres avec l'alphabet français si l'on veut que la première lettre soit une voyelle et que la deuxième soit une consonne ?
    d) Combien peut-on former de "mots" de deux lettres avec l'alphabet français si l'on veut que les lettres soient distinctes ?
18. Combien peut-on composer de "mots" formés de trois voyelles distinctes ?
19. On a écrit 7 lettres, mais on ne dispose que de 4 timbres. De combien de manières peut-on choisir les lettres à envoyer ?
20. Avec 10 députés et 6 sénateurs, on veut former une commission composée de :

    a) 3 députés b) 4 sénateurs
    c) 5 députés et 3 sénateurs d) 7 sénateurs

    Compter le nombre de possibilités pour chaque cas.
21. Calculer le nombre de possibilités de ranger sur une étagère de bibliothèque 5 gros livres, 4 livres d'une grosseur moyenne et 3 livres beaucoup plus minces, sachant que les livres de même grosseur sont placés les uns à côté des autres.
22. De combien de façons différentes peut-on mettre six boules dans trois tiroirs
23. A sa mort, un vieux rentier a légué 9 peintures à ses 3 enfants. De combien de façons différentes peut-il répartir les 9 peintures aux 3 enfants si chacun doit avoir 3 peintures ?
24. On prend au hasard 3 ampoules électriques dans un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses.
    a) combien de façons différentes?
    b) combien de façons différentes si aucune ampoule choisie ne doit être défectueuse?
    c) combien de façons différentes si 1 seule ampoule doit être défectueuse?
25. Combien un village doit-il avoir d'habitants au minimum pour que l'on soit sûr que 2 personnes au moins ont les mêmes initiales (composés de 2 lettres) ?

1. Combien de mots de 6 lettres peut-on former (en utilisant chaque lettre une seule fois)avec les lettres des mots:
a) NOMBRE b) TRIANGLE c) COUCOU d) CANARD

2. De combien de façons peut-on choisir 6 questions ≠ parmi 10 questions possibles?

3. Combien de jurys différents de 3 hommes et 4 femmes peut-on former à partir de 8 hommes et 6 femmes?

4. De combien de manières peut-on sélectionner 2 hommes, 4 femmes, 3 garçons et 3 filles parmi 6 hommes, 8 femmes, 4 garçons et 5 filles si:
a) aucune condition n'est imposée.
b) un certain homme et une certaine femme doivent obligatoirement être choisis?

5. Combien de nombre de 5 chiffres ≠ peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, ..., 9 si:
a) les nombres doivent être impairs?
b) les deux premiers chiffres doivent être pairs?

6. On prend au hasard 3 ampoules électriques dans un lot de 15 ampoules dont 5 sont défectueuses.
a) combien de façons différentes?
b) combien de façons différentes si aucune ampoule choisie ne doit être défectueuse?
c) combien de façons différentes si 1 seule ampoule doit être défectueuse?

7. Dans une classe de 16 élèves comportant 10 filles et 6 garçons, combien peut-on former de groupes de travail de 5 élèves dont: a) trois sont des garçons?
b) au moins trois sont des garçons?
c) au plus trois sont des garçons?

9. Combien peut-on écrire de « mots » différents en utilisant une seule fois chaque lettre du mot MISSISSIPI ?

10. On considère 10 points A, B, C, … du plan, tel que trois d' entre-eux ne sont jamais alignés.
a) combien de droites sont engendrés par ces points?
b) combien d'entre elles passent par A?
c) combien d'entre elles ne passent pas par A et B?
d) combien de triangles sont engendrés par ces points?
e) combien d'entre eux comprennent le point A?

11. On désire former des plaques de voiture comprenant d'abord trois lettres puis trois chiffres.
a) combien de ces plaques commencent par les trois lettres ABL?
b) combien de ces plaques contiennent les trois lettres ABL et contiennent trois chiffres différents?
c) combien de ces plaques contiennent trois voyelles différentes et trois chiffres multiples de 3?

12. On dispose d'allumettes toutes de même longueur mais de différentes couleurs: *rouges, bleues, vertes, blanches et jaunes*. Combien de triangles équilatéraux, différant par les couleurs, peut-on former?

Chapitre 3. Le binôme de Newton

1. Le triangle de Pascal

On a vu les propriétés suivantes:

1) $C_n^p = C_n^{n-p}$ et $C_n^0 = C_n^n = 1$
2) $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Ces propriétés et notamment la dernière formule permettent d'établir facilement un tableau des valeurs de C_n^p:

C_{n-1}^{p-1}	C_{n-1}^p
	C_n^p

n \ P	0	1	2	3	4	5	6
0	C_0^0						
1	C_1^0	C_1^1					
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	
6	…	…	…	…	…	…	…

n \ P	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1										
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

2. Le binôme de Newton

Les identités

$$(x+a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3x^2 a + 3xa^2 + a^3$$

se généralisent de la façon suivante : $\forall n \in \boldsymbol{N}_0, \quad \forall x,\ a \in \boldsymbol{R}$

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n a^0 + C_n^1 x^{n-1} a + C_n^2 x^{n-2} a^2 + C_n^3 x^{n-3} a^3 + \ldots + C_n^{n-1} x a^{n-1} + C_n^n x^0 a^n$$

ou

$$\boxed{(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, x^{n-k}\, a^k}$$

Remarques

- Le développement comprend *n*+1 termes.
- Les C_n^i sont appelés les coefficients binomiaux.
- Pour déterminer le développement de $(x-a)^n$, il suffit de remplacer *a* par - *a* dans le développement donné.

- **Exemples**

$$(x-2)^4 =$$

$$(2x+3y)^5 =$$

EXERCICES

1. Déterminer le développement de:

   a) $(x+a)^6$ b) $(x+2)^4$ c) $(x-1)^5$ d) $(x^2+2y)^4$

2. Dans le développement du binôme indiqué, déterminer le terme dont l'exposant de x est donné:

   a) degré 6 en x de $(x+a)^{12}$
   c) degré 2 en x de $(2x^2 + 3/x^3)^6$

   b) degré 8 en x de $(x^2+2y)^{10}$
   d) degré 6 en x de $(x^3 - 2/x^2)^7$

3. Démontrer : a et b étant deux nombres naturels, pour tout $m \leq a+b$:

$$\boxed{C_{a+b}^{m} = \sum_{k} C_a^k \cdot C_b^{m-k}}$$

où $\sum\limits_{k}$ signifie qu'on somme pour toute les valeurs naturels de k pour lesquelles C_a^k et C_b^{m-k} sont définies.

4. Démontrer :

   a) $C_n^{p+1} = \dfrac{n-p}{p+1} C_n^p$
   b) $C_n^m C_{n-m}^{p-m} = C_n^p C_p^m$ (n>p>m)

5. Démontrer :

a) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$

b) $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}$